

FISICA GENERALE II

FORMULARIO di ELETTROMAGNETISMO

1) Elettrostatica

$\epsilon = \epsilon_o \epsilon_r =$ costante dielettrica assoluta ; $\epsilon_r =$ costante dielettrica relativa
 Nel vuoto(e nella maggior parte dei gas, condizioni STP) $\epsilon_r \simeq 1$

Legge di Coulomb nel vuoto : $\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$

Campo elettrostatico : $\vec{E} = \frac{\vec{F}}{q}$ o $\vec{E} = \frac{d\vec{F}}{dq}$

Potenziale : forma integrale : $V(P_1) - V(P_2) = \int_{P_1}^{P_2} \vec{E} \cdot d\vec{l}$
 forma differenziale : $\vec{E} = -\overrightarrow{grad} V = -\vec{\nabla} V$

Conservativit  del campo elettrostatico

Forma integrale : $\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$
 Forma differenziale : $\vec{\nabla} \times \vec{E} = 0$

Campo elettrostatico e potenziale generati da :

-carica isolata puntiforme : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2} \hat{r}$ $V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r}$

-distribuzione discreta di carica : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_i \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i$ $V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum \frac{q_i}{r_i}$

-distribuzione continua di carica : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\Omega} \frac{\rho d\tau}{r^2} \hat{r}$ $V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{\Omega} \frac{\rho d\tau}{r}$

Dipolo elettrico

Potenziale : $V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} = -\frac{1}{4\pi\epsilon} \vec{p} \cdot \vec{\nabla} \left(\frac{1}{r} \right)$

Campo : $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left[\frac{3(\vec{p} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{p}}{r^3} \right]$

Energia del dipolo in un campo esterno : $U = -\vec{p} \cdot \vec{E}$

Forza agente su un dipolo costante: $\vec{F} = -\vec{\nabla} U = \vec{\nabla} (\vec{p} \cdot \vec{E})$

Momento meccanico agente : $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}$

Multipoli

Il potenziale generato da una distribuzione di carica, a grande distanza dalle cariche, pu  venir espresso tramite uno sviluppo in serie i cui primi termini sono :

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} + \dots$$

(Q carica totale e \vec{p} momento di dipolo della distribuzione)

distribuzione discreta : $\vec{p} = (\sum_i q_i x_i, \sum_i q_i y_i, \sum_i q_i z_i)$

distribuzione continua : $\vec{p} = (\int \rho x d\tau, \int \rho y d\tau, \int \rho z d\tau)$

Legge di Gauss

Forma integrale : $\int_{\Sigma} \vec{E} \cdot \hat{n} dS = \frac{Q_{int}}{\epsilon_0}$ (Σ superficie chiusa)

Forma differenziale : $\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$

Conduttori

- $\vec{E}_{int} = 0$
- conduttore è sempre equipotenziale
- campo in vicinanza di un conduttore (Teorema di Coulomb): $\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \hat{n}$
- forza per unità di superficie su un conduttore : $\frac{dF}{dS} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0}$

Equazione del potenziale elettrostatico

Equazione di Poisson : $\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$

Equazione di Laplace : $\nabla^2 V = 0$ (dove $\rho = 0$)

Condensatori

Definizione di capacità : $C = \frac{Q}{\Delta V}$

Capacità cond. piano : $C = \epsilon \frac{S}{d}$

Capacità cond. cilindrico : $C = 2\pi\epsilon \frac{L}{\log(r_{est}/r_{int})}$

Capacità cond. sferico : $C = 4\pi\epsilon \frac{r_{est} r_{int}}{r_{est} - r_{int}}$

Condensatori in parallelo : $C = C_1 + C_2 + \dots + C_N$

Condensatori in serie : $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \dots + \frac{1}{C_N}$

Energia del condensatore : $U = \frac{1}{2} Q \Delta V = \frac{1}{2} C \Delta V^2 = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$

Forza tra armature : $F = \frac{Q^2}{2\epsilon S}$

(cond.piano)

Dielettrici

Vettore polarizzazione : $\vec{P} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta\tau}$

(momento dip. per unità volume)

mezzo isotropo e lineare : $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$

Suscettività dielettrica : $\chi_e = N[\alpha_{def} + \alpha_{orien}] \simeq N[4\pi R_{at}^3 + \frac{1}{3\epsilon_0} \frac{p_o^2}{kT}]$

(N = no. molecole per unità di volume)

Costante dielettrica relativa: $\epsilon_r = \chi + 1$

Vettore spostamento elettrico : $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \epsilon_0 \epsilon_r \vec{E}$

Cariche di polarizzazione : $\sigma_{pol} = \vec{P} \cdot \hat{n}$

: $\rho_{pol} = -\vec{\nabla} \cdot \vec{P}$

Equazioni dell'elettrostatica in presenza di dielettrici

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \vec{E} &= 0 & ; & \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \\ \vec{\nabla} \cdot \vec{D} &= \rho & ; & \int_{\Sigma} \vec{D} \cdot \hat{n} dS = Q_{lib}\end{aligned}$$

Condizioni di continuità all'interfaccia fra due mezzi

$$E_{t1} = E_{t2} \quad ; \quad D_{n1} = D_{n2}$$

Dielettrici densi

$$\begin{aligned}\text{Campo di Lorentz : } \vec{E}_m &= \vec{E} + \frac{\vec{P}}{3\epsilon_0} \\ \text{Formula Clausius-Mossotti : } \frac{\epsilon_r - 1}{\epsilon_r + 2} &= \frac{N\alpha}{3\epsilon_0}\end{aligned}$$

Energia elettrostatica

$$\begin{aligned}\text{Energia distribuzione discreta : } U &= \frac{1}{2} \frac{1}{4\pi\epsilon} \sum_{i,j \neq i} \frac{q_i q_j}{r_{ij}} = \frac{1}{2} \sum_i q_i V_i \\ & (V_i \text{ potenziale di tutte le cariche } \neq i)\end{aligned}$$

$$\text{Energia distribuzione continua : } U = \frac{1}{2} \int \rho V d\tau$$

$$\text{Energia sistema conduttori : } U = \frac{1}{2} \sum_i Q_i V_i$$

(V_i potenziale conduttore i con carica Q_i)

$$\text{Densità energia del campo : } u = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$$

Densità energia interazione di un dielettrico in un campo esterno:

$$u = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} = \frac{1}{2} \epsilon_0 \epsilon_r E^2$$

2) Correnti stazionarie

$$\text{Densità di corrente : } \vec{j} = nq \vec{v} = \rho \vec{v}$$

$$\text{Equazione di continuità : } \vec{\nabla} \cdot \vec{j} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} (\rho = \text{densità di carica})$$

$$\text{Intensità di corrente : } i = \frac{dq}{dt} = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{n} dS$$

$$\begin{aligned}\text{Legge di Ohm (forma locale) : } \vec{j} &= \sigma \vec{E} (\sigma = \text{conducibilità}) \\ \text{per elemento finito : } V &= R i\end{aligned}$$

$$\text{Resistenza conduttore di sezione costante : } R = \frac{1}{\sigma} \frac{l}{S} = \rho_s \frac{l}{S}$$

$$\text{N resistenze in serie : } R = R_1 + R_2 + \dots + R_N$$

$$\text{N resistenze in parallelo : } \frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$$

$$\text{Legge di Kirchhoff - legge dei nodi : } \sum_k i_k = 0$$

$$\text{legge delle maglie : } \sum_k i_k R_k = \sum_k V_k$$

Effetto Joule (potenza $P = dW/dt$, $W = \text{energia}$):

$$\text{in forma locale : } dP = \vec{j} \cdot \vec{E} d\tau$$

$$\text{conduttore finito : } P = V i = i^2 R$$

3) Magnetismo

Magnetostatica nel vuoto

Campo generato da una carica in moto : $\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} q \frac{\vec{v} \times \vec{r}}{r^3}$

Campo generato da una corrente : $\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} i \int \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3}$

-filo rettilineo indefinito : $\vec{B} = \frac{\mu_o}{2\pi} \frac{i}{r} \hat{\tau}$

-spira circolare (sull'asse !) : $\vec{B} = \frac{\mu_o}{2} i \frac{R^2}{\sqrt{(R^2 + z^2)^3}} \hat{k}$

-interno solenoide indefinito : $B = \mu_o i n$ [$n = \frac{N_{spire}}{L}$]

Forza agente su una corrente : $\vec{F} = \int i d\vec{l} \times \vec{B}$

Forza su carica in moto (Forza Lorentz) : $\vec{F} = q \vec{v} \times \vec{B}$

Equazioni della magnetostatica nel vuoto:

$$\begin{aligned} \vec{\nabla} \cdot \vec{B} &= 0 & ; & & \int_{\Sigma_{chiusa}} \vec{B} \cdot \hat{n} dS &= 0 \\ \vec{\nabla} \times \vec{B} &= \mu_o \vec{j} & ; & & \oint \vec{B} \cdot d\vec{l} &= \mu_o \sum i_{conc} \end{aligned}$$

Dipolo magnetico

Momento dipolo distrib. correnti: $\vec{m} = \frac{1}{2} \int \vec{r} \times \vec{j} d\tau$

Per una spira piana: $\vec{m} = i S \hat{n}$

Potenziale Vettore : $\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$

Campo : $\vec{B} = \frac{\mu_o}{4\pi} \left[\frac{3(\vec{m} \cdot \vec{r})}{r^5} \vec{r} - \frac{\vec{m}}{r^3} \right]$

Energia dipolo in campo esterno : $U = -\vec{m} \cdot \vec{B}$

Momento agente su dipolo in campo esterno : $\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B}$

Momento magnetico e momento angolare di una

carica q, massa m, in moto circolare uniforme: $\vec{m} = \frac{q}{2m} \vec{L}$

Precessione (di Larmor) in campo esterno:

$$\omega_L = \frac{qB}{m}$$

Potenziale vettore

Definizione : $\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$

Equazione del potenziale : $\nabla^2 \vec{A} = -\mu_o \vec{j}$

Potenziale generato da un dipolo : $\vec{A} = \frac{\mu_o}{4\pi} \frac{\vec{m} \times \vec{r}}{r^3}$

Proprietá magnetiche della materia

Vettore magnetizzazione : $\vec{M} = \lim_{\Delta\tau \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{m}}{\Delta\tau}$

(momento dipolo per unitá di volume)

mezzo isotropo e lineare : $\vec{M} = \frac{1}{\mu_o} \frac{\chi}{1 + \chi} \vec{B} = \chi \vec{H}$

Suscettività magnetica: $\chi_m = \chi_{dia} + \chi_{par} \simeq -\mu_0 \frac{NZe^2 \langle r^2 \rangle}{6m_e} + \mu_0 \frac{N m_0^2}{3 kT}$

Vettore campo magnetico \vec{H} : $\vec{H} = \frac{1}{\chi} \vec{M}$

Relazione fra \vec{B} e \vec{H} : $\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \mu_0 \vec{M} = \mu_0 \mu_r \vec{H}$
 : $\mu_r = \chi + 1$

Correnti di magnetizzazione : $j_{sup} = \vec{M} \times \hat{n}$
 : $j_{vol} = \vec{\nabla} \times \vec{M}$

Equazioni della magnetostatica nei mezzi materiali

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j}_{libere} \quad ; \quad \oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \sum i_{conc}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0 \quad ; \quad \int_{\Sigma chiusa} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$$

Condizioni di continuità all'interfaccia fra due mezzi

$$H_{t1} = H_{t2} \quad ; \quad B_{n1} = B_{n2}$$

Circuiti magnetici

Legge di Hopkinson : $F = R\Phi$

$F = Ni$ (forza magnetomotrice)

$R = \frac{1}{\mu} \frac{l}{S}$ (Riluttanza)

Riluttanze in serie : $R = R_1 + R_2 + \dots + R_N$

Riluttanze in parallelo : $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \dots + \frac{1}{R_N}$

4) Campi variabili

Campi quasi-statici

Legge di Faraday-Neumann

$$\text{Forma integrale : } \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

$$\text{Forma locale : } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Coefficiente di mutua induzione fra due circuiti :

$$\Phi_2 = M_{12} i_1 \quad ; \quad \Phi_1 = M_{21} i_2 \quad ; \quad M_{12} = M_{21}$$

Coefficiente di autoinduzione : $\Phi = Li$

$$\text{Induttanza solenoide : } L = \mu_0 n^2 l S$$

Energia magnetica

$$\text{Energia sistema circuiti : } U = \frac{1}{2} \sum_k \Phi_k i_k$$

$$\text{Densità energia del campo : } u = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} = \frac{1}{2} \mu_0 \mu_r H^2 = \frac{1}{2} \frac{B^2}{\mu_0 \mu_r}$$

$$\text{Energia induttore : } U = \frac{1}{2} L i^2$$

5) Circuiti elettrici

Grandezze variabili sinusoidalmente e fasori :

$$i = i_o \cos(\omega t + \phi) \equiv \Re[i_o \exp(i\phi) \exp(i\omega t)] = \Re[I]$$

$$I = \tilde{I}_o e^{i\omega t} ; \tilde{I}_o = i_o e^{i\phi}$$

Circuito RC : $R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V$
 Carica C : $q = CV(1 - \exp(-t/\tau)) ; \tau = RC$
 Scarica C : $q = q_o \exp(-t/\tau)$

Circuito RL : $L \frac{di}{dt} + R i = V$
 Extracorrente chiusura : $i = \frac{V}{R}(1 - \exp(-t/\tau)) ; \tau = L/R$
 Extracorrente apertura : $i = \frac{V}{R} \exp(-t/\tau)$

Circuito RLC serie : $L \frac{d^2i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = V$
 Frequenza di risonanza : $\omega_r = 2\pi\nu_r = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Impedenze complesse :

resistenza : $Z = R$
 capacità : $Z = \frac{1}{i\omega C}$
 induttanza : $Z = i\omega L$

6) Onde elettromagnetiche

Equazioni di Maxwell

Forma differenziale

Forma integrale

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{D} = \rho$$

$$\int_{\Sigma} \vec{D} \cdot \hat{n} dS = Q_{int}$$

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$$

$$\int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} dS = 0$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{n} dS$$

$$\vec{\nabla} \times \vec{H} = \vec{j} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\oint_{\Gamma} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{\Sigma} \vec{j} \cdot \hat{n} dS + \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \vec{D} \cdot \hat{n} dS$$

$$\text{Densità corrente di spostamento : } \vec{j} = \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

$$\text{Legge di Ohm(per conduttori) : } \vec{j} = \sigma \vec{E}$$

Caratteristiche generali propagazione per onde

$$\text{Equazione delle onde (3D) : } \nabla^2 \phi - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

$$\text{Equazione delle onde (1D) : } \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = 0$$

parametri dell'onda sinusoidale :

$$\text{numero d'onda : } k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{v}$$

$$\text{vettore d'onda : } \vec{k} = k \overrightarrow{(\text{versore propag.})}$$

$$\text{lunghezza d'onda : } \lambda = \frac{v}{\nu}$$

$$\text{pulsazione : } \omega = 2\pi\nu$$

onda piana sinusoidale progressiva(1D) :

$$\phi = \phi_0 \sin(kz - \omega t) \equiv \phi_0 e^{i(kz - \omega t)}$$

onda sferica sinusoidale progressiva(1D) :

$$\phi = \frac{\phi_0}{r} \sin(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t) = \phi_0 e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$$

Caratteristiche delle onde elettromagnetiche

$$\text{Velocità di propagazione(fase) : } v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r \mu_r}} \quad ; \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}}$$

$$\text{Trasversalità onde e.m. : } \vec{E} = \vec{v} \times \vec{B}$$

Onda piana (polarizzata || asse-x) :

$$E = E_x = E_o \sin(kz - \omega t)$$

$$B = B_y = B_o \sin(kz - \omega t)$$

$$E_o = v B_o = Z_o H_o \quad ; \quad Z_o = \sqrt{\frac{\mu_o}{\epsilon_o}} \simeq 377\Omega$$

$$\text{Velocità di gruppo : } v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{c}{n(\omega) + \omega \frac{dn}{d\omega}}$$

Effetto Doppler (c =velocità onda e.m.):

$$\nu' = \nu \frac{1 - (v_{oss}/c) \cos \theta}{\sqrt{1 - v_{sor}^2/c^2}}$$

Effetto Doppler nel moto collineare(non relativistico, v =velocità onda):

$$\nu' = \frac{v - v_{oss}}{v - v_{sor}} \nu$$

Energia e impulso dell'onda

$$\text{Densità di energia : } u = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2 = \epsilon E^2 = \frac{B^2}{\mu}$$

(energia per unità di volume)

$$\text{Vettore di Poynting : } \vec{\mathcal{P}} = \vec{E} \times \vec{H}$$

$$\text{Intensità (istantanea)dell'onda : } \mathcal{I} = |\vec{\mathcal{P}}| = v \epsilon E^2 = v u$$

(potenza per unità di superficie)

$$\text{Intensità (media) dell'onda(sinusoidale) : } \langle \mathcal{I} \rangle = v \epsilon \frac{E^2}{2}$$

$$\text{Quantità di moto dell'onda : } \vec{p} = u_{on} \hat{k} = \frac{\vec{\mathcal{P}}}{v}$$

(per unità di superficie e unità di tempo)

Dipolo elettrico oscillante

$$p(t) = p_o \sin \omega t$$

Campo a grandi distanze (vuoto) :

$$E_\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{p_o}{r} \sin \theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin(kr - \omega t) \quad ; \quad B_\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_o} \frac{p_o}{cr} \sin \theta \left(\frac{\omega}{c}\right)^2 \sin(kr - \omega t)$$

$$\text{Intensit\`a (media) irradiata dal dipolo : } \langle \mathcal{I} \rangle = \frac{p_o^2 \omega^4}{32\pi^2 \epsilon_o c^3 r^2} \sin^2 \theta$$

(energia per unit\`a superficie e unit\`a di tempo)

$$\text{Potenza (media) totale irradiata dal dipolo : } P = \langle \frac{dE}{dt} \rangle = \frac{p_o^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_o c^3}$$

Carica accelerata

Potenza (media) totale irradiata (carica q oscillante sinusoid. $z = z_o \sin \omega t$)

$$P = \langle \frac{dE}{dt} \rangle = \frac{q^2 z_o^2 \omega^4}{12\pi\epsilon_o c^3}$$

Intensit\`a irradiata da carica accelerata nella direzione θ (rispetto all'accelerazione):

$$I(\theta) = \frac{dP}{d\theta} = \frac{q^2 a^2}{16\pi^2 \epsilon_o c^3} \sin^2 \theta$$

$$\text{Potenza istantanea irradiata da una carica accelerata : } P = \frac{dE}{dt} = \frac{q^2 a^2}{6\pi\epsilon_o c^3}$$

7) Ottica

Ottica geometrica

Indice di rifrazione : $n = \sqrt{\epsilon_r}$; $\epsilon_r = \epsilon_r(\omega)$ cost. dielettrica

velocit\`a della luce in un mezzo : $v = \frac{c}{n}$

cammino ottico : $d = \sum_i n_i l_i$

Leggi di Snell : $\theta_{inc} = \theta_{rifl}$; $\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{n_2}{n_1} = \frac{v_1}{v_2}$

angolo limite : $\sin \theta_{lim} = \frac{n_2}{n_1}$; se $n_2 < n_1$

angolo di Brewster : $\tan \theta_{Bre} = \frac{n_2}{n_1}$

Formule di Fresnel ($\mu_1 = \mu_2 \simeq \mu_o$):

$$\begin{aligned} \left(\frac{E_{rifl}}{E_{inc}}\right)_{\parallel} &= \frac{n_2 \cos \theta_1 - n_1 \cos \theta_2}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = \frac{\tan(\theta_1 - \theta_2)}{\tan(\theta_1 + \theta_2)} \\ \left(\frac{E_{rifl}}{E_{inc}}\right)_{\perp} &= \frac{n_1 \cos \theta_1 - n_2 \cos \theta_2}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = -\frac{\sin(\theta_1 - \theta_2)}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \\ \left(\frac{E_{tra}}{E_{inc}}\right)_{\parallel} &= \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_2 \cos \theta_1 + n_1 \cos \theta_2} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2) \cos(\theta_1 - \theta_2)} \\ \left(\frac{E_{tra}}{E_{inc}}\right)_{\perp} &= \frac{2n_1 \cos \theta_1}{n_1 \cos \theta_1 + n_2 \cos \theta_2} = \frac{2 \cos \theta_1 \sin \theta_2}{\sin(\theta_1 + \theta_2)} \end{aligned}$$

$$\text{trasmissivit\`a : } t = \left(\frac{E_{tra}}{E_{inc}}\right)^2$$

$$\text{riflettivit\`a : } r = \left(\frac{E_{rifl}}{E_{inc}}\right)^2$$

Caso di incidenza normale di onda non polarizzata:

$$t = \left(\frac{2\sqrt{n_1 n_2}}{n_1 + n_2} \right)^2$$

$$r = \left(\frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} \right)^2$$

Formula lenti sottili: $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}$; $\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$

Interferenza

Interferenza fra onde piane, sinusoidali, lin. polarizzate:

$$E_1 = A_1 \sin[(kz - \omega t) + \phi_1]$$

$$E_2 = A_2 \sin[(kz - \omega t) + \phi_2]$$

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\phi_1 - \phi_2)$$

Due sorgenti coerenti (alla Young) : $I = I_o \cos^2 \beta$

$$\beta = \frac{\pi d}{\lambda} \sin \theta \quad (d = \text{distanza fra sorgenti})$$

N sorgenti coerenti : $I = I_o \left[\frac{\sin^2(N\delta/2)}{\sin^2(\delta/2)} \right]$

$$\delta = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta \quad (b = \text{larghezza fenditura})$$

Diffrazione

Diffrazione (di Fraunhofer) da fenditura rettangolare :

$$I = I_o \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right)$$

$$\alpha = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \quad (b = \text{larghezza fenditura})$$

condizione per i minimi ; $\sin \theta = n \frac{\lambda}{b} [n \neq 0]$

Diffrazione (di Fraunhofer) da foro circolare :

$$I = I_o \left[\frac{2J_1(2\pi R \sin \theta / \lambda)}{2\pi R \sin \theta / \lambda} \right]^2$$

condizione per il 1° minimo ; $\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{2R}$

Diffrazione (di Fraunhofer) da reticolo di N fenditure :

$$I = I_o \left(\frac{\sin^2 \alpha}{\alpha^2} \right) \left(\frac{\sin^2 N\beta}{\sin^2 \beta} \right)$$

$$\alpha = \frac{\pi b}{\lambda} \sin \theta \quad (b = \text{larghezza fenditura})$$

$$\beta = \frac{\pi p}{\lambda} \sin \theta \quad (p = \text{distanza fra fenditure})$$

massimi di intensità ; $p \sin \theta = n\lambda$ [p= passo]

Potere dispersivo del reticolo ; $\frac{d\theta}{d\lambda} = \frac{n}{p \cos \theta}$

Potere risolutivo del reticolo ; $\frac{\lambda}{\Delta\lambda} = nN$

8) Operatori vettoriali e trasformazioni di coordinate

Coordinate cartesiane

Elemento di volume : $d\tau = dx dy dz$

$$\text{grad } f \equiv \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial x} \hat{i}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \hat{i}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{i}_z$$

$$\text{div } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

$$\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left[\frac{\partial v_y}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial y} \right] \hat{i}_x + \left[\frac{\partial v_z}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial z} \right] \hat{i}_y + \left[\frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} \right] \hat{i}_z$$

$$\text{Laplaciano : } \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Coordinate cilindriche

Trasformazione da $(x, y, z) \Leftrightarrow (\rho, \theta, z)$:

$$x = \rho \cos \theta ; y = \rho \sin \theta$$

Elemento di volume : $d\tau = \rho d\rho d\theta dz$

$$\text{grad } f \equiv \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{i}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{i}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \hat{i}_z$$

$$\text{div } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho v_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \theta} v_\theta + \frac{\partial}{\partial z} v_z$$

$$\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} = \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial z} \right] \hat{i}_\rho + \left[\frac{\partial v_\rho}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial \rho} \right] \hat{i}_\theta + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta} \right] \hat{i}_z$$

$$\text{Laplaciano : } \nabla^2 = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Coordinate sferiche

Trasformazione da $(x, y, z) \Leftrightarrow (\rho, \theta, \phi)$:

$$x = \rho \sin \theta \cos \phi ; y = \rho \sin \theta \sin \phi ; z = \rho \cos \theta$$

Elemento di volume : $d\tau = \rho^2 \sin \theta d\rho d\theta d\phi$

$$\text{grad } f \equiv \vec{\nabla} f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{i}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{i}_\theta + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{i}_\phi$$

$$\text{div } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{v} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 v_\rho) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (v_\theta \sin \theta) + \frac{1}{\rho \sin \theta} \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi}$$

$$\text{rot } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{v} = \frac{1}{\rho \sin \theta} \left[\frac{\partial (v_\phi \sin \theta)}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial \phi} \right] \hat{i}_\rho + \frac{1}{\rho} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial v_\rho}{\partial \phi} - \frac{\partial (\rho v_\phi)}{\partial \rho} \right] \hat{i}_\theta + \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial (\rho v_\theta)}{\partial \rho} - \frac{\partial v_\rho}{\partial \theta} \right] \hat{i}_\phi$$

$$\text{Laplaciano : } \nabla^2 = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho^2 \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2 \sin \theta} \left[\frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \right] + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

Relazioni vettoriali utili

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c} (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$\text{rot grad } f \equiv \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} f = 0$$

$$\text{div rot } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} \times \vec{v} = 0$$

$$\text{rot rot } \vec{v} \equiv \vec{\nabla} \times \vec{\nabla} \times \vec{v} = \vec{\nabla} (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) - \nabla^2 \vec{v}$$

$$\text{rot}(f \vec{v}) \equiv \vec{\nabla} \times (f \vec{v}) = f (\vec{\nabla} \times \vec{v}) - \vec{\nabla} f \times \vec{v}$$

$$\text{div}(f \vec{v}) \equiv \vec{\nabla} \cdot (f \vec{v}) = f (\vec{\nabla} \cdot \vec{v}) + \vec{\nabla} f \cdot \vec{v}$$

9) Costanti di uso frequente

Costante dielettrica del vuoto : $\epsilon_o = 8.85 \cdot 10^{-12} \text{ F/m}$

Permeabilit  magnetica del vuoto : $\mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$

Carica dell'elettrone : $e = 1.60 \cdot 10^{-19} \text{ C}$

Massa dell'elettrone : $m_e = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Rapporto e/m dell'elettrone : $e/m = 1.76 \cdot 10^{11} \text{ C/kg}$

Massa del protone : $m_p = 1.67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$

Velocit  delle onde e.m. nel vuoto : $c = 3.0 \cdot 10^8 \text{ m/s}$

Impedenza del vuoto : $Z_o = 376.7 \text{ } \Omega$

Costante di Planck : $h = 6.626 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$

Magnetone di Bohr : $\mu_B = 9.42 \cdot 10^{-24} \text{ A m}^2$

Costante gravitazionale : $G = 6.672 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$

Numero di Avogadro : $N_A = 6.02252 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$

Costante di Boltzmann : $k = 1.38054 \cdot 10^{-23} \text{ J K}^{-1}$

Costante dei gas : $R = 8.314 \text{ J/(mol K)}$

$$= 1.986 \text{ cal/(mol K)}$$

Volume di una mole(STP gas ideale) : $k = 22.414 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3 \text{ mol}^{-1}$

Unit  astronomica : $AU = 1.49598 \cdot 10^{11} \text{ m}$

Raggio(equatoriale)della terra : $R_{\oplus} = 6.378 \cdot 10^6 \text{ m}$

Massa della terra : $M_{\oplus} = 5.973 \cdot 10^{24} \text{ kg}$

Massa del sole : $M_{\odot} = 1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$