Moto Rettilineo Uniformemente Accelerato (MRUA)

In questo breve articolo cercheremo di presentare la teoria del MRUA in modo intuitivo e semplice, ma non per questo scadere nella banalità.
Si definisce MRUA *il moto di un corpo che si muove con traiettoria rettilinea con accelerazione vettoriale costante*.
Nel MRUA la velocità varia in modo proporzionale al tempo che passa.
Per definizione di accelerazione abbiamo che

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \qquad (1)$$

La formula (1) vale sempre, indipendentemente dal tipo di moto che abbiamo.
Nel caso di MRUA, essendo per definizione l'accelerazione costante, risulta che Δv e Δt sono due grandezze direttamente proporzionali (ricordiamo che due grandezze sono direttamente proporzionali se il loro rapporto è costante).
Poiché abbiamo

$$\Delta v = v_f - v_i$$

e

$$\Delta t = t_f - t_i$$

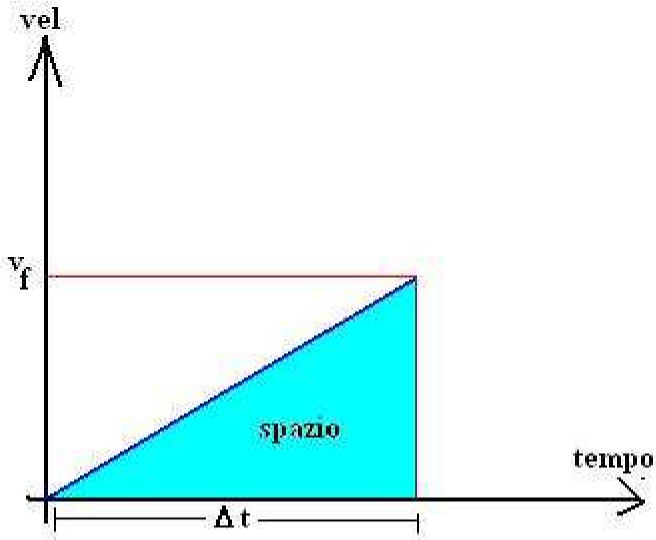
possiamo calcolare la velocità finale per effetto di un'accelerazione mantenuta per un certo tempo Δt in questo modo:

$$v_f = v_i + a \cdot \Delta t \quad (\text{ossia } \Delta v = a \cdot \Delta t) \qquad (2)$$

La (2) prende il nome di **legge delle velocità** del MRUA. Risulta evidente che se il moto inizia con velocità iniziale nulla ($v_i = 0$), la (2) diventa

$$v_f = a \cdot \Delta t \qquad (3)$$

Adesso dobbiamo prestare molta attenzione per determinare la relazione che descrivi lo spazio percorso in funzione del tempo nel MRUA. Per fare ciò utilizziamo un diagramma particolare, che ha il tempo come asse delle ascisse e la velocità come asse delle ordinate. Risolviamo il nostro problema "trasferendolo" ad un problema di natura geometrica di più facile soluzione.
Iniziamo dicendo che, come succedeva nel caso del MRU, in un diagramma tempo-velocità (e solo in questo!) lo spazio percorso è dato dall'area che sta sotto il grafico.
Iniziamo dunque dalla situazione più semplice, cioè quella descritta dalla (3); il corpo parte da fermo e subisce un'accelerazione per un tempo Δt. Mostriamo la situazione con un grafico.



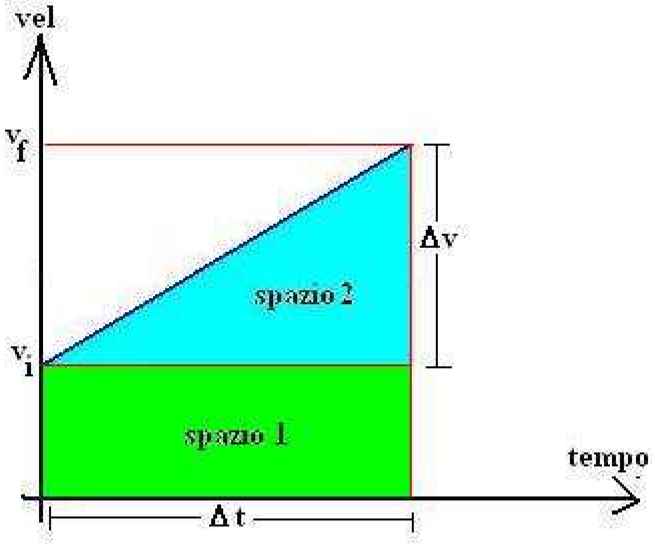
La linea blu indica la velocità che aumenta linearmente (cioè in modo proporzionale) rispetto al tempo Δt, che è anche il tempo per cui viene mantenuta l'accelerazione costante. L'area sotto il grafico, che nel nostro caso rappresenta l'area di un triangolo rettangolo, come già detto precedentemente, rappresenta lo spazio percorso durante il moto accelerato. In formule abbiamo

$$Area = s = \frac{1}{2} v_f \cdot \Delta t \qquad (4)$$

Se ora inseriamo la (3) nella (4), al posto della velocità finale, otteniamo

$$s = \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 \qquad (5)$$

La (5) esprime la **legge oraria del MRUA**.
Cosa succede se nel momento in cui il corpo inizia ad accelerare costantemente esso ha già una velocità iniziale v_i non nulla?
La situazione è descritta nel seguente grafico:



In questo caso lo spazio totale è formato dalla somma di due aree: quella di un rettangolo (in verde) e quella di un triangolo ad esso sovrapposto (in celeste).
Dalla geometria risulta che

$$spazio1 = v_i \cdot \Delta t$$

e

$$spazio2 = \frac{1}{2} \Delta v \cdot \Delta t$$

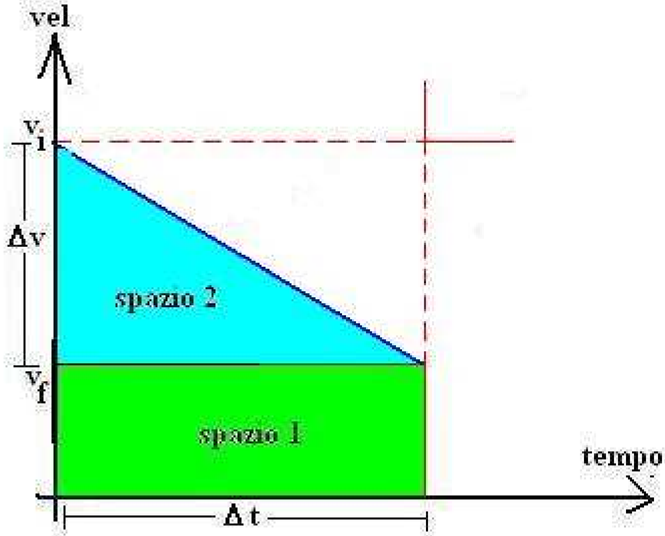
Lo spazio totale sarà dato quindi dalla somma di queste due aree:

$$s_{tot} = v_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} \Delta v \cdot \Delta t \qquad (6)$$

Come abbiamo fatto in precedenza, possiamo far comparire nella (6) l'accelerazione ottenendo

$$s_{tot} = v_i \cdot \Delta t + \frac{1}{2} a \cdot \Delta t^2 \qquad (7)$$

La (7) prende il nome di **legge oraria generalizzata del MRUA**.
Supponiamo che ora il nostro moto sia decelerato, cioè che la velocità diminuisce proporzionalmente al tempo. In questo caso abbiamo una accelerazione negativa ($a < 0$). La legge delle velocità (2) a questo punto continua a valere. Infatti, la velocità finale ora risulta essere minore di quella iniziale ($v_f < v_i$) per cui abbiamo $\Delta v < 0$. I conti tornano in quanto essendo Δt una quantità comunque positiva, visto che normalmente il tempo scorre sempre in avanti ($t_f > t_i$ sempre), e l'accelerazione negativa, dalla (2) risulta $\Delta v < 0$, come è logico attendersi.
Vediamo ora come si comporta la legge oraria del MRUA quando l'accelerazione è negativa. Il grafico seguente mostra una situazione in cui la velocità diminuisce linearmente partendo da una velocità iniziale v_i ad una finale v_f non nulla e tale che $v_f < v_i$ (moto decelerato).



In questo caso, come risulta evidente, lo spazio totale è la somma delle aree delle due figura geometriche (rettangolo e triangolo sovrapposto). Questa volta, a differenza della precedente, dobbiamo stare attenti al corretto ordine delle velocità. Dalla figura risulta chiaro che

$$spazio1 = v_f \cdot \Delta t$$

mentre

$$spazio2 = \frac{1}{2}|\Delta v| \cdot \Delta t$$

dove con $|\Delta v|$ abbiamo indicato il valore assoluto (positivo) di Δv, che nel nostro caso è negativo (e sappiamo benissimo che in geometria non esistono aree negative).
Ma questo modo di ragionare è un po' fuorviante, quindi è molto meglio utilizzare un approccio diverso, sempre appoggiandoci alla geometria.
Se osserviamo bene la figura, ci rendiamo conto di come lo spazio 2 sia l'area di un triangolo che rappresenta esattamente la metà del rettangolo di area $\Delta t \cdot |\Delta v|$. Allora sfruttiamo questa semplice osservazione dicendo che lo spazio totale ($s_{tot} = s_1 + s_2$) è tutta l'area del rettangolo di base Δt e altezza v_i meno il "pezzo" in più che è rappresentato dal triangolo di base Δt e altezza $|\Delta v|$.
Quindi

$$s_{tot} = v_i \cdot \Delta t - \frac{1}{2}|\Delta v| \cdot \Delta t \tag{8}$$

Sostituendo, per la (2), al posto di $|\Delta v|$ la quantità $|a| \cdot \Delta t$ (considerando quindi l'accelerazione come positiva, eliminando il segno "-"), la (8) diventa

$$s_{tot} = v_i \cdot \Delta t - \frac{1}{2}|a| \cdot \Delta t^2 \tag{9}$$

dove ribadiamo ancora una volta che con $|a|$ abbiamo indicato il valore positivo dell'accelerazione.