

prof. Valerio Curcio: Sistemi oscillanti semplici

Iniziamo il nostro studio delle oscillazioni esaminando la definizione generale di un sistema oscillante. Da questa definizione possiamo esaminare il caso speciale dell'oscillazione armonica, da cui deriviamo il moto di un sistema armonico.

Definizione di Sistema Oscillante

Cos'è esattamente un sistema oscillante? In breve, esso rappresenta un sistema nel quale una particella o un insieme di particelle si muovono avanti e indietro. Può essere una palla che rimbalza sopra il pavimento, o una molla che si comprime e si allunga, ecc. Il principio base delle oscillazioni è che la particella ritorni al suo stato iniziale dopo un certo periodo di tempo.

Questa particolarità del moto, caratteristica delle oscillazioni, è chiamata moto periodico, e si incontra in tutte le aree della fisica.

Possiamo altresì definire un sistema oscillante in modo leggermente più preciso, in termini di forze che agiscono su una particella nel particolare sistema. In ogni sistema oscillante c'è un punto di equilibrio nel quale la particella non avverte l'influenza di alcuna forza. Un pendolo, per esempio, è in equilibrio quando si trova in posizione verticale, e la forza di gravità è bilanciata interamente dalla tensione del filo. Tuttavia, se il pendolo viene spostato da questa posizione, su di esso agisce una componente della forza di gravità che tende a riportarlo nella sua posizione di equilibrio, indipendentemente dal modo in cui viene spostato.

Se denotiamo questo punto di equilibrio come $x = 0$, possiamo generalizzare il seguente principio per qualsiasi sistema oscillante:

In un sistema oscillante, la forza agisce sempre in direzione opposta allo spostamento subito dalla particella rispetto al suo punto d'equilibrio.

Questa forza può essere costante, oppure può variare la sua intensità relativamente al tempo o alla posizione, ed è chiamata *forza di richiamo*.

Se una forza obbedisce a lungo al principio appena citato, ne risulta che il moto è oscillatorio. A volte la descrizione di sistemi oscillanti può essere molto complessa. Per questo motivo focalizzeremo la nostra attenzione su un particolare tipo di oscillazione, *il moto armonico semplice*, che possiede una spiegazione fisica relativamente semplice.

Oscillatore armonico semplice

Tra tutti i diversi tipi di sistemi oscillanti, il più semplice, matematicamente parlando, è l'oscillatore armonico. Il moto di questo sistema può essere descritto usando le funzioni seno e coseno e la loro derivazione successiva. Per ora, tuttavia, definiamo semplicemente il moto armonico e descriviamo la forza che si manifesta in ogni oscillazione.

Per meglio sviluppare l'idea di oscillatore armonico usiamo il comune esempio rappresentato da un sistema massa-molla. Per una data molla di costante elastica k , la molla esercita sempre una forza sulla massa per far sì che possa ritornare nella sua posizione di equilibrio. Diciamo anche che l'intensità della forza è data dalla legge di Hooke:

$$F(x) = -kx$$

dove il punto di equilibrio è denotato da $x = 0$. In altre parole, più la molla è compressa o allungata, più violentemente essa cerca di riportare il blocco alla sua posizione d'equilibrio. Questa equazione è valida solo se non ci sono altre forze che agiscono sul blocco. Se esistono attriti tra il blocco ed il piano, o se c'è resistenza dell'aria, il moto risultante non è più armonico semplice, e la forza che avverte il blocco non può essere descritta dalla suddetta equazione.

La molla è l'esempio più comune di moto armonico semplice, un pendolo può esserlo solo approssimativamente, così pure un oscillatore di torsione obbedisce alle leggi del moto armonico semplice.

Moto armonico semplice

Dal concetto di oscillatore armonico semplice possiamo derivare la descrizione del moto di un qualche sistema armonico semplice. Iniziamo con la formula basilare della forza,

$$F = -kx.$$

Usando la seconda legge di Newton, possiamo scrivere la forza in termini dell'accelerazione:

$$ma = -kx.$$

In questo modo abbiamo una relazione diretta tra accelerazione e posizione. L'equazione suddetta è un'equazione differenziale, che può essere risolta facilmente. Riscriviamo l'ultima equazione in termini di derivate:

$$m \left(\frac{d^2 x}{dt^2} \right) = -kx$$

quindi:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m} x = 0$$

Interpretiamo questa equazione. La derivata seconda di una funzione x a cui è aggiunta se stessa (a parte una costante) è uguale a zero. Ciò significa che la derivata seconda della nostra funzione deve avere la stessa forma della funzione stessa. Ci viene immediatamente in mente che la funzione coseno gode di questa proprietà. Così possiamo provare una soluzione della nostra equazione differenziale e vedere se funziona.

Come tentativo di soluzione scriviamo:

$$x = a \cos(bt + \phi)$$

dove a , b e ϕ (detto anche sfasamento) sono costanti. Proviamo a differenziare questa equazione rispetto al tempo, vediamo che

$$\frac{dx}{dt} = -ab \sin(bt + \phi)$$

e

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -ab^2 \cos(bt + \phi)$$

Inserendo i risultati ottenuti nella nostra equazione differenziale originale, vediamo che:

$$-ab^2 \cos(bt + \phi) + \frac{k}{m} a \cos(bt + \phi) = 0$$

Risulta chiaro che, se

$$b^2 = \frac{k}{m}$$

allora l'equazione è soddisfatta. Perciò l'equazione che governa l'oscillazione armonica semplice è:

$$x(t) = a \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}} t + \phi\right)$$

Equazione del moto armonico semplice

Grazie all'equazione del moto armonico semplice possiamo dire molto sul moto di un sistema armonico. Prima di tutto, $x(t)$ è massimo quando la funzione coseno è 1, o se si vuole quando $x = a$. a è chiamata ampiezza dell'oscillazione, che nel caso della molla la denotiamo con x_m , cioè lo spostamento massimo dalla posizione di equilibrio. Secondariamente, possiamo calcolare il periodo di una oscillazione completa del sistema. Supponiamo che nelle condizioni iniziali ci sia $\phi = 0$; quando $t = 0$ si ha che $x = x_m$. Ma lo stesso risultato si ottiene per

$$t = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Poiché si nota che il sistema occupa la stessa posizione x_m all'istante zero e all'istante considerato nell'ultima formula, possiamo affermare con assoluta certezza che il periodo di una oscillazione completa è

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Possiamo anche calcolare la frequenza del moto come inverso del periodo:

$$\nu = \frac{1}{T} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Introduciamo anche la *frequenza angolare* o *pulsazione* ω del moto:

$$\omega = 2\pi\nu = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Notiamo che sia il periodo che la frequenza del moto (e quindi la pulsazione) dipendono esclusivamente dalla massa m del blocco e dalla costante elastica k della molla. Indipendentemente

da come viene spostato il blocco dalla posizione di equilibrio, il sistema oscilla allo stesso modo. Questo è un fatto di notevole importanza. Un blocco che subisce un piccolo spostamento si muoverà con velocità bassa, ma la frequenza del sistema oscillante resta la stessa anche se lo spostamento iniziale fosse maggiore.

Notiamo che il nostro valore di ω è lo stesso per quella costante che abbiamo chiamato b nell'equazione originale. Così ora sappiamo che $a = x_m$ e $b = \omega$. Inoltre siamo in grado di derivare ripetutamente rispetto al tempo la nostra equazione in modo da generare un set di equazioni per il moto armonico semplice:

$$\begin{aligned}x(t) &= x_m \cos(\omega t + \phi) \\v(t) &= -\omega x_m \sin(\omega t + \phi) \\a(t) &= -\omega^2 x_m \cos(\omega t + \phi)\end{aligned}$$

In questo modo abbiamo ottenuto le equazioni del moto di un dato sistema armonico semplice.

Oscillazioni smorzate

Sinora abbiamo supposto che nessuna forza d'attrito agisca sul nostro oscillatore. Se fosse così un pendolo, ad esempio, oscillerebbe indefinitamente. L'ampiezza delle oscillazioni reali, invece, a causa dell'attrito, diminuisce gradualmente sino ad annullarsi; il moto è detto smorzato dall'attrito e si dice armonico smorzato. Spesso l'attrito nasce dalla resistenza dell'aria o da forze interne e usualmente dipende dalla velocità del corpo che si muove. In molti casi di interesse la forza d'attrito è proporzionale alla velocità del corpo e diretta in verso opposto.

Aggiungendo una forza d'attrito proporzionale alla velocità all'equazione del moto armonico semplice originaria, l'equazione del moto armonico semplice smorzato diventa:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \beta \frac{dx}{dt} + \omega^2 x = 0$$

dove β è detta costante di smorzamento e ω è la frequenza angolare o pulsazione del moto:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Osservando l'equazione differenziale rappresentata dall'equazione del moto armonico semplice smorzato, notiamo che la soluzione deve essere tale che sia la sua derivata prima che la seconda deve essere uguale a se stessa, a meno di qualche costante. Sappiamo bene che la funzione esponenziale gode di questa proprietà.

Ipotizziamo quindi una soluzione del tipo:

$$x(t) = e^{rt}$$

con r costante.

Facciamo ora le derivate prima e seconda di questa funzione rispetto al tempo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = re^{rt}$$
$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = r^2e^{rt}$$

Sostituiamole nella nostra equazione del moto armonico semplice smorzato e cerchiamo di capire come deve essere la costante r affinché possano essere verificate le condizioni imposte dalla equazione.

$$r^2e^{rt} + \beta re^{rt} + \omega^2e^{rt} = 0$$
$$(r^2 + \beta r + \omega^2)e^{rt} = 0$$

Essendo la funzione esponenziale strettamente positiva, deve essere:

$$r^2 + \beta r + \omega^2 = 0$$

cioè dobbiamo calcolare le radici dell'equazione di secondo grado in r :

$$r_{\pm} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\omega^2}}{2}$$

A questo punto dobbiamo distinguere tre regimi differenti che dipendono dal segno della quantità che si trova sotto la radice quadrata. Chiamiamo questa quantità α :

$$\alpha = \beta^2 - 4\omega^2$$

Se $\alpha < 0$ abbiamo un regime di sottosmorzamento (*underdamping*);

Se $\alpha = 0$ abbiamo un regime di smorzamento critico (*critical damping*);

Se $\alpha > 0$ abbiamo un regime di sovrasmorzamento (*overdamping*).

Underdamping

Il moto armonico semplice in regime di sottosmorzamento si ha quando:

$$\alpha = \beta^2 - 4\omega^2 < 0$$

Definiamo una nuova quantità γ in modo che risulti:

$$\gamma \equiv \frac{1}{2}\sqrt{-\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{4\omega^2 - \beta^2}$$

Questa quantità è molto importante perché ci permette di scrivere la soluzione r in funzione di γ .

Infatti risulta:

$$r_{\pm} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\omega^2}}{2} = -\frac{1}{2}\beta \pm i\gamma$$

quindi la soluzione $x(t)$ dell'equazione differenziale del moto armonico semplice smorzato la possiamo esprimere in questo modo:

$$x(t) = e^{-(\beta/2 \pm i\gamma)t}$$

Adesso possiamo usare la formula di Eulero:

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

Quindi la nostra $x(t)$ diventa:

$$x(t) = e^{-(\beta/2 \pm i\gamma)t} = e^{-\frac{\beta}{2}t} e^{\pm i\gamma t} = e^{-\frac{\beta}{2}t} [\cos(\gamma t) \pm i \sin(\gamma t)]$$

Siamo interessati alle soluzioni reali. Inoltre sappiamo che in un'equazione differenziale ordinaria, lineare e omogenea, la combinazione lineare delle soluzioni linearmente indipendenti è anch'essa una soluzione. Ma l'ultima equazione proposta altro non è che la somma delle soluzioni, ne segue che sia la parte reale che quella immaginaria, prese separatamente, soddisfano l'equazione differenziale ordinaria, quindi sono esse stesse soluzioni. A meno di costanti arbitrarie, possiamo identificare le soluzioni come:

$$x_1(t) = e^{-\frac{\beta}{2}t} \cos(\gamma t)$$

$$x_2(t) = e^{-\frac{\beta}{2}t} \sin(\gamma t)$$

così la soluzione generale è:

$$x(t) = e^{-\frac{\beta}{2}t} [A \cos(\gamma t) + B \sin(\gamma t)].$$

Se deriviamo una volta rispetto al tempo otteniamo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\frac{\beta}{2} e^{-\frac{\beta}{2}t} [A \cos(\gamma t) + B \sin(\gamma t)] + e^{-\frac{\beta}{2}t} [B \gamma \sin(\gamma t) - A \gamma \cos(\gamma t)]$$

I valori iniziali ($t = 0$) sono i seguenti:

$$x(0) = A$$

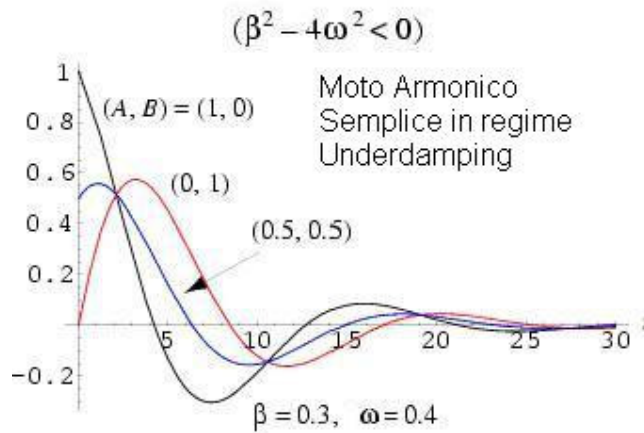
$$x'(0) = -\frac{1}{2} \beta A + B \gamma$$

A e B possono essere espresse in termini delle condizioni iniziali, cioè:

$$A = x(0)$$

$$B = \frac{\beta x(0)}{2\gamma} + \frac{x'(0)}{\gamma}$$

Il grafico seguente mostra un oscillatore armonico semplice a regime di sottosmorzamento con parametri $\omega = 0.3$ e $\beta = 0.4$ e per tre condizioni iniziali di A e B :



Critical Damping

Il critical damping è un caso speciale del moto armonico semplice smorzato nel quale succede che

$$\alpha \equiv \beta^2 - 4\omega^2 = 0$$

così che risulta evidentemente

$$\begin{aligned}\beta^2 &= 4\omega^2 \\ \beta &= 2\omega\end{aligned}$$

In questo caso, $\alpha = 0$ è tale che le soluzioni della forma $x(t) = e^{rt}$ soddisfano

$$r_{\pm} = \frac{1}{2}(-\beta) = -\frac{1}{2}\beta = -\omega$$

Una delle soluzioni è dunque la seguente:

$$x_1(t) = e^{-\omega t}$$

Per trovare l'altra soluzione linearmente indipendente, possiamo fare uso della seguente identità:

$$x_2(t) = x_1(t) \int \frac{e^{-\int p(t) dt}}{[x_1(t)]^2} dt$$

Poiché abbiamo $p(t) = 2\omega$,

$$e^{-\int p(t) dt}$$

diventa semplicemente $e^{-2\omega t}$. Otteniamo quindi:

$$x_2(t) = e^{-\omega t} \int \frac{e^{-2\omega t}}{[e^{-\omega t}]^2} dt = e^{-\omega t} \int dt = te^{-\omega t}$$

La soluzione generale è quindi la seguente:

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\omega t}$$

Derivando la soluzione generale ottenuta una volta rispetto al tempo avremo:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Be^{-\omega t} - \omega(A + Bt)e^{-\omega t}$$

Considerando le condizioni iniziali ($t = 0$) possiamo calcolare i valori delle costanti A e B :

$$x(0) = A$$

$$x'(0) = B - A\omega$$

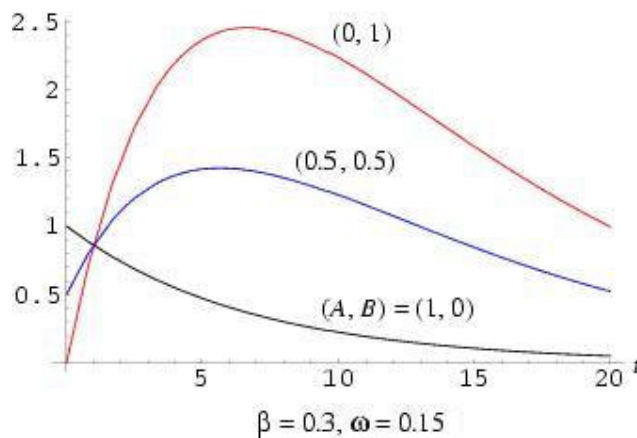
così abbiamo:

$$A = x(0)$$

$$B = x'(0) + \omega x(0)$$

Il grafico seguente è un esempio di scillatore armonico semplice in regime di smorzamento critico con $\omega = 0.3$, $\beta = 0.4$ e per tre valori delle costanti A e B :

Moto Armonico Semplice Critical Damping



Overdamping

Il moto armonico semplice in regime di sovrasmorzamento avviene quando

$$\alpha = \beta^2 - 4\omega^2 > 0$$

quindi le due radici reali saranno:

$$x_1(t) = e^{r_1 t}$$

$$x_2(t) = e^{r_2 t}$$

dove

$$r_{\pm} = \frac{1}{2} \left(-\beta \pm \sqrt{\beta^2 - 4\omega^2} \right)$$

La soluzione quindi è data da

$$x(t) = Ae^{r_-t} + Be^{r_+t}$$

Dove A e B sono costanti. I valori iniziali ($t = 0$) sono:

$$x(0) = A + B$$

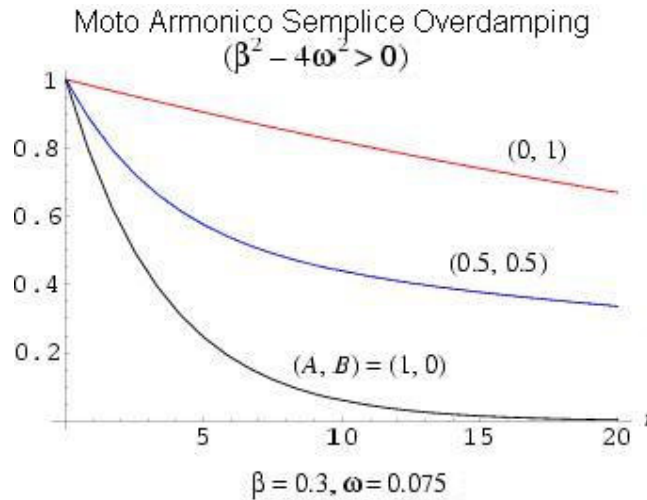
$$x'(0) = Ar_- + Br_+$$

Così che

$$A = x(0) + \frac{r_+x(0) - x'(0)}{r_- - r_+}$$

$$B = -\frac{r_+x(0) - x'(0)}{r_- - r_+}$$

Il grafico seguente mostra un oscillatore armonico semplice in regime di sovrasmorzamento, con $\omega = 0.3$, $\beta = 0.4$ e per tre diversi valori di A e B :



Bibliografia:

- Papoulis, A. *Motion of a Harmonically Bound Particle*. §15-2 in Probability, Random Variables, and Stochastic Processes, 2nd ed. New York: McGraw-Hill, pp. 524-528, 1984.
- Kiefer, David R. and Landa, Judah. *Reviewing Physics*. New York: Amsco School Publications, 1995.
- Cutnell, John D. and Johnson, Kenneth W. *Physiscs*, Third Edition. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1995.
- Ivey, Donald G. *Physics*. Ronald Press, New York, 1974.
- Barger, Vernon. *Classical Mechanics: A Modern Perspective*. New York: McGraw-Hill, 1973.
- Resnick, Robert. Halliday, David. Krane, Kenneth. *Physics Volume One*. New York: John Wiley & Sons, Inc, 1992.