

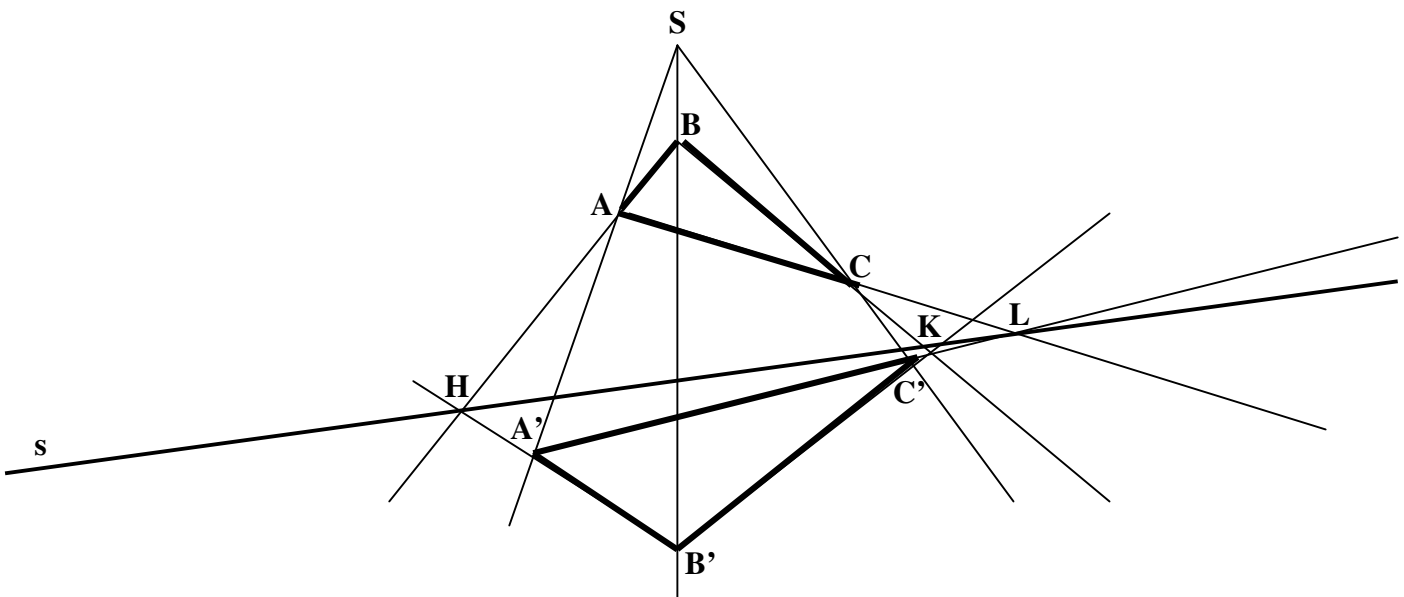
# **Le affinità omologiche**

**Triangoli omologici:**

Due triangoli si dicono omologici se le rette congiungenti i punti omologhi dei due triangoli si incontrano in un medesimo punto.

**Principio dei triangoli omologici di Desargues:**

Se due triangoli,  $ABC$  e  $A'B'C'$ , sono omologici allora i punti di intersezione  $H$ ,  $K$  e  $L$  dei lati corrispondenti,  $AB$  e  $A'B'$ ,  $BC$  e  $B'C'$ ,  $CA$  e  $C'A'$  appartengono ad una stessa retta  $s$ , e viceversa (si veda la figura in basso).

Casi particolari:

Nel riferimento fra i triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$ , il centro  $S$  e l'asse  $s$  (l'uno o l'altro o anche entrambi) possono risultare impropri.

Allora, corrispondentemente ai vari casi, il principio enunciato assume forme diverse (particolarizzazioni *affini*).

Quando l'asse  $s$  è a distanza infinita si ha il *principio dei triangoli omotetici*:

Se nei triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$  i lati omologhi sono paralleli:

$$AB \parallel A'B', BC \parallel B'C', CA \parallel C'A',$$

le rette:

$$AA', BB', CC'$$

Passano per un medesimo punto,  $S$ .

Viceversa: *se le rette,  $AA'$ ,  $BB'$ ,  $CC'$  escono da un medesimo punto,  $S$ , e due coppie di lati omologhi risultano costituite da rette parallele, lo stesso accade della terza.*

Qualora poi anche  $S$  sia improprio, la situazione si fa più particolare: abbiamo una traslazione con conseguente *principio dei triangoli in traslazione*:

*Se i triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$  possono essere riferiti in modo che sia:*

$$AA' // BB' // CC'$$

*e:*

$$AB // A'B', AC // A'C',$$

*risulta pure:*

$$BC // B'C'.$$

*E viceversa.*

Infine, nell'ipotesi che  $S$  sia improprio e la  $s$  propria, nasce il *principio dei triangoli in affinità omologica*:

*Se nei triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$  valgono le:*

$$AA' // BB' // CC',$$

*i lati opposti si incontrano sopra una retta,  $s$ .*

*Inversamente: dall'allineamento dei punti comuni ai lati corrispondenti e da:*

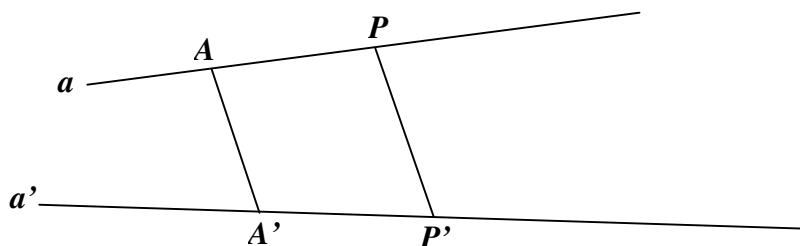
$$AA' // BB'$$

*segue*

$$CC' // AA' // BB'.$$

### La proiezione parallela

Date due rette,  $a$  e  $a'$ , e preso  $A \in a$  e  $A' \in a'$ , se  $P \in a$ , la parallela condotta da  $P$  alla  $AA'$  incontra la  $a'$  nel punto  $P'$ , che è appunto la *proiezione* (o *immagine*) di  $P$  sulla  $a'$ , nella *proiezione parallela* della  $a$  sopra la  $a'$  secondo la *direzione* (o *punto improprio*) della retta  $AA'$  (si veda la figura).



La proiezione parallela conserva l'ordine di successione di punti, cioè, se sopra la  $a$  è:

$$A < C < B,$$

lo stesso accade, sulla  $a'$ , per le immagini:

$$A' < B' < C'.$$

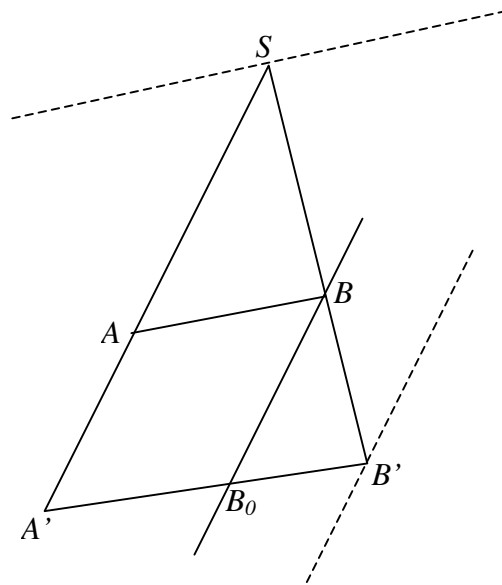
### La proiezione centrale fra rette parallele

Consideriamo il fascio delle rette uscenti da un punto (proprio),  $S$  (*centro del fascio*), e tagliamo con due *rette parallele*,  $r$  ed  $r'$ .

Nasce fra queste un riferimento (biunivoco) che prende il nome di *proiettività* (con il *centro* in  $S$ ).

Si dice anche che quella corrispondenza è ottenuta per *proiezione (centrale)*, dal centro (proprio)  $S$ , dell'una retta sull'altra.

Indicati  $A$  e  $B$  due punti della  $r$  e con  $A'$  e  $B'$  le loro proiezioni sulla  $r'$ , si fermi l'attenzione sopra i triangoli  $SAB$  e  $SA'B'$  (figura).



Se conduciamo per  $S$  la parallela ad  $AB$ , si ha (per il teorema di Talete):

$$\frac{SA}{SA'} = \frac{SB}{SB'}$$

Analogamente, tracciando per  $B$  e  $B'$  le parallele alla  $AA'$ , risulta:

$$\frac{SB}{SB'} = \frac{A'B_0}{A'B'} = \frac{AB}{A'B'}.$$

Cioè, nei triangoli  $SAB$  e  $SA'B'$ , i rapporti fra i lati corrispondenti sono uguali.

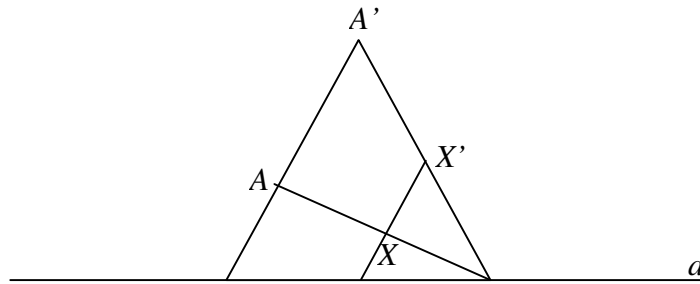
Questa premessa consente di affermare che *la proiezione centrale fra rette parallele conserva i rapporti*.

## L'affinità omologica

### La definizione

Si fissi nel piano una retta,  $a$ , ed una qualsiasi coppia di punti  $A, A'$ .

Chiamiamo *affinità omologica*, o *omologia affine*, l'applicazione biettiva (o corrispondenza biunivoca) dal piano in sé nella quale al punto  $X$  (non appartenente alla retta  $AA'$ ) si dà come omologo il punto  $X'$ , situato sulla retta condotta per  $X$  parallelamente alla  $AA'$  e tale che le rette  $AX$  e  $A'X'$  s'incontrano in un punto della retta assegnata  $a$  (si veda la figura).



cioè:

le rette che uniscono due punti corrispondenti sono parallele alla  $AA'$  (la quale fornisce la *direzione* o *centro improprio* della corrispondenza introdotta);

la retta che congiunge un punto,  $X$ , con  $A$  e quella individuata da  $A'$  e dal corrispondente  $X'$  di  $X$  si tagliano in un punto che appartiene alla retta  $a$ , detta *asse* dell'affinità omologica.

Ogni punto della  $a$  si dice *unito*, e lo stesso vale per ogni retta parallela alla  $AA'$ .

Dalla costruzione indicata rimangono esclusi i punti della retta  $AA'$ . Salvo questa lacuna nasce una corrispondenza biunivoca fra i punti del piano, determinata in modo unico dall'asse  $a$  e dalla coppia  $A, A'$ .

Indichiamo l'affinità omologica con  $\hat{A}_O$ , e, quando sia opportuno mettere in evidenza gli elementi che la individuano, useremo il simbolo:

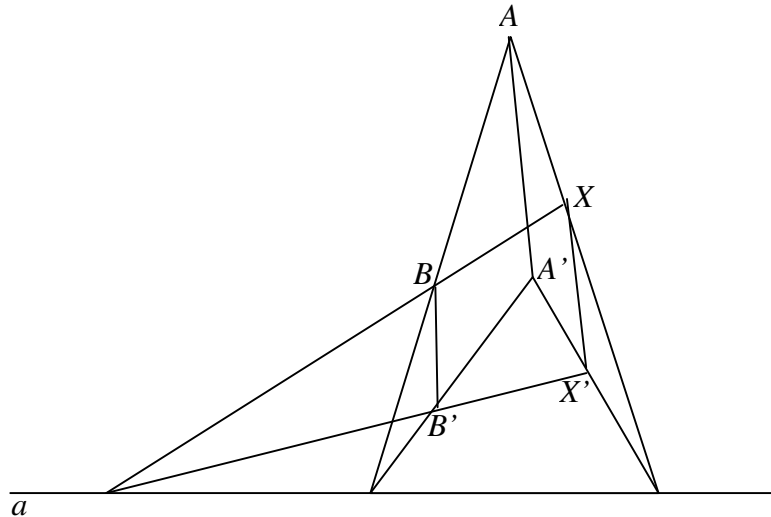
$$\hat{A}_O(a; A, A').$$

Se i punti  $B$  e  $B'$  si corrispondono nella  $\hat{A}_O$ , questa è individuata, oltre che dall'asse  $a$ , anche dalla stessa coppia  $B, B'$ :

$$\hat{A}_O(a; A, A') = \hat{A}_O(a; B, B').$$

Si tratta di mostrare che, preso un qualunque punto,  $X$ , esso ha un medesimo corrispondente nella  $\hat{A}_O(a; A, A')$  e nella  $\hat{A}_O(a; B, B')$ .

Sia  $X'$  l'omologo di  $X$  nella  $\hat{A}_O(a; A, A')$ .



Risulta:

$$AA' \parallel BB' \parallel XX',$$

allora dai triangoli:

$$ABX, A'B'X'$$

Si riconosce, per il principio dei triangoli in affinità omologica, che i punti:

$$AB \cap A'B', BX \cap B'X', XA \cap X'A'$$

Appartengono ad una medesima retta, che è la  $a$ .

Ciò basta a provare che  $X'$  è l'omologo di  $X$  anche nella  $\hat{A}_O(a; B, B')$ .

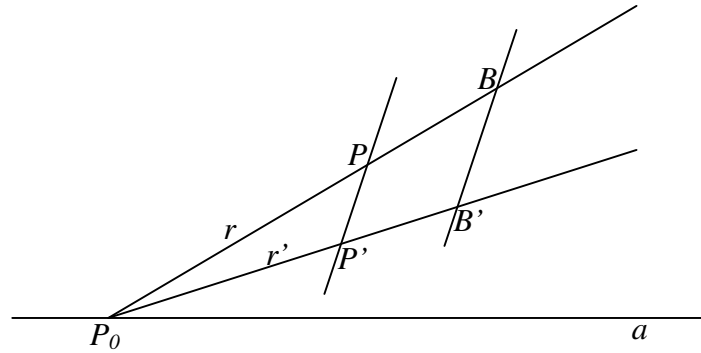
Così la lacuna rimasta per la costruzione della nostra corrispondenza, relativamente ai punti della retta  $AA'$ , non sussiste più: è sufficiente ricorrere a un'altra qualsiasi coppia di punti omologhi,  $B, B'$ .

### Le rette omologhe

Nell'affinità omologica,  $\hat{A}_O$ , a una retta corrisponde una retta.

Se  $r$  è la retta data, prendiamo sopra di essa un punto,  $B$ , del quale indichiamo, al solito, con  $B'$  il corrispondente nella  $\hat{A}_O$ .

Per costruire la  $\mathcal{A}_O$  ci possiamo valere della coppia  $B, B'$ , e allora appare subito che, mentre il punto  $P$  percorre la  $r$ , il suo omologo  $P'$  descrive la retta  $B'P_0$ , essendo  $P_0$  il punto d'intersezione della  $r$  con l'asse  $a$ .



Se il punto  $B'$  dovesse trovarsi sulla retta  $r$ , significherebbe che  $r$  risulterebbe omologa a se stessa, cioè risulterebbe unita.

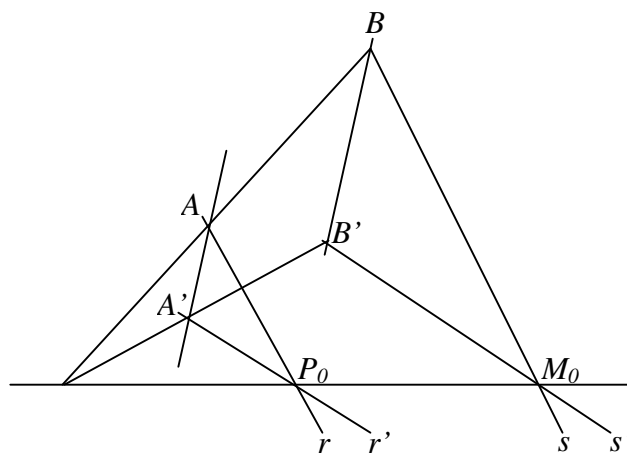
Mettiamo in evidenza il fatto che due rette omologhe s'incontrano sull'asse  $a$ , d'accordo con la circostanza già rilevata che la  $a$  è luogo di punti uniti nella  $\mathcal{A}_O(a; A, A')$ .

Si noti pure che ogni retta parallela alla  $AA'$  è unita, cioè coincide con la sua corrispondente; le omologhe di due rette parallele sono parallele fra loro:

$$r \parallel s \Leftrightarrow r' \parallel s'$$

Per quest'ultima osservazione, sia:

$$A \in r, B \in s$$



cosicch :

$$r' \equiv A'P_0, s' \equiv B'M_0$$

posto:

$$P_0 = r \cap a, M_0 = s \cap a.$$

Allora, essendo:

$$AA' // BB', AP_0 // BM_0$$

dai triangoli omotetici,  $AA'P_0$  e  $BB'M_0$ , deduciamo:

$$A'P_0 // B'M_0.$$

Ne segue che nell'affinità omologica:

un parallelogramma si muta in un parallelogramma; segmenti equipollenti si cambiano in segmenti equipollenti fra loro (ma non ai primi); segmenti uguali per traslazione hanno per omologhi segmenti uguali per traslazione (fra loro, ma non ai primi).

### La caratterizzazione

L'affinità omologica può essere definita come *un'applicazione biiettiva del piano in sé, la quale muta rette in rette e in cui le congiungenti punti omologhi risultano tutte parallele* (cioè esiste in essa un fascio di rette unite con centro improprio).

Per il modo stesso in cui abbiamo presentato l'affinità omologica, si deve evidentemente provare che, in una corrispondenza come quella ora introdotta, i punti d'incontro delle rette omologhe appartengono ad una medesima retta: l'asse  $a$ .

Siano  $r, r'$  ed  $s, s'$  due coppie di rette corrispondenti. Poniamo:

$$H = r \cap r', K = s \cap s'.$$

I punti:

$$A = r \cap s, A' = r' \cap s'$$

risultano omologhi.

Si dica allora  $x$  una terza retta, che incontri la  $r$  e la  $s$  nei punti  $B$  e  $C$  rispettivamente:

$$B = r \cap x, C = s \cap x.$$

I punti  $B'$  e  $C'$ , che ad essi corrispondono, sono determinati dalle condizioni:

$$BB' // AA', B' \in r'; CC' // AA', C' \in s'.$$

E la  $x$  ha per omologa la  $x'$  che unisce  $B'$  con  $C'$ . Si determina così la solita situazione (si veda la prossima figura).

Nei triangoli  $ABC$  e  $A'B'C'$  è:

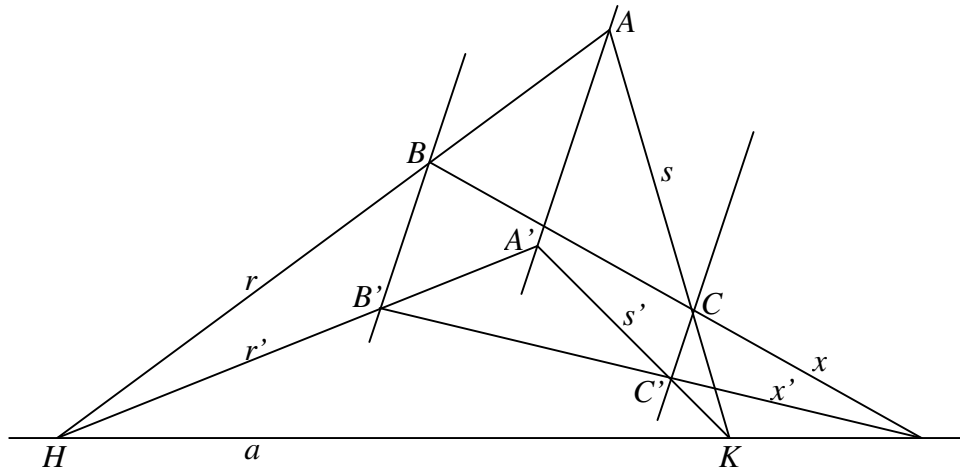
$$AA' // BB' // CC',$$

e quindi il punto in cui si tagliano la  $x$  e la  $x'$  sta sulla retta  $HK$ .

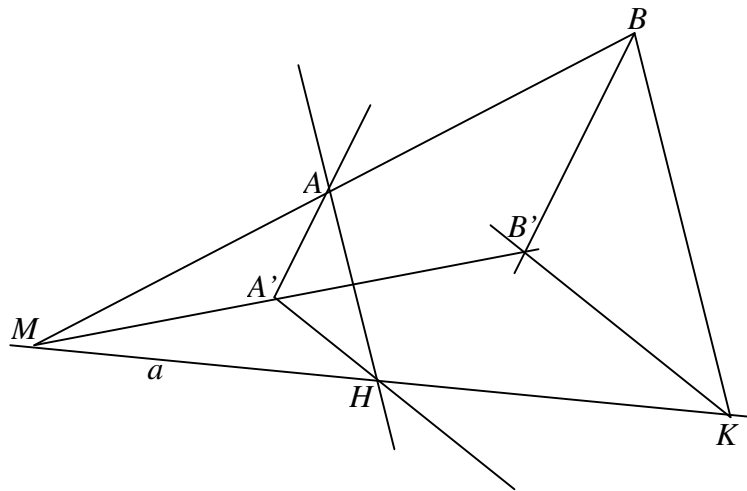
Il discorso rimane valido anche qualora fosse:

$$r // r', s // s',$$

ipotesi che conduce alla traslazione, la quale pertanto rientra, come caso particolare, anche tra le affinità omologiche.



Una definizione si riconduce subito alla precedente. E' quella per cui l'affinità omologica viene presentata come *una corrispondenza biunivoca che trasforma rette in rette, rette parallele in rette parallele, e nella quale i punti ottenuti come intersezioni di rette omologhe si trovano tutti sopra una medesima retta, a.*



Siano  $A, A'$  e  $B, B'$  due coppie di punti corrispondenti (si veda figura precedente). Le rette omologhe  $AB$  e  $A'B'$  s'incontrano in:

$$M \in a.$$

Per  $A$  e per  $B$  si conducano due rette parallele,  $AH$  e  $BK$ , con:

$$H \in a, K \in a.$$

Alla  $AH$  e alla  $BK$  corrispondono rispettivamente  $A'H$  e  $B'K$ , quindi:

$$A'H \parallel B'K,$$

essendo:

$$AH \parallel BK.$$

Allora i triangoli omotetici (rispetto al centro  $M$ )  $AHA'$  e  $BKB'$  assicurano che:

$$AA' \parallel BB'.$$

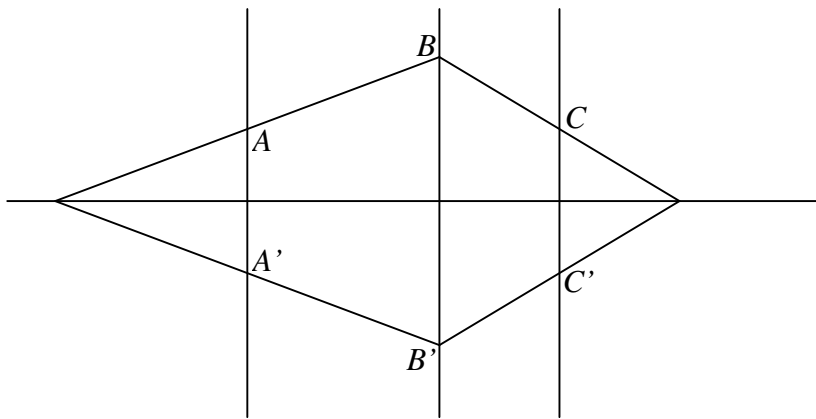
cioè nella nostra corrispondenza le congiungenti punti omologhi hanno una direzione fissa, e quindi siamo ricondotti al caso considerato in precedenza.

Tre coppie di punti omologhi  $A, A'$ ;  $B, B'$  e  $C, C'$ , con:

$$AA' \parallel BB' \parallel CC',$$

valgono a individuare l'affinità omologica.

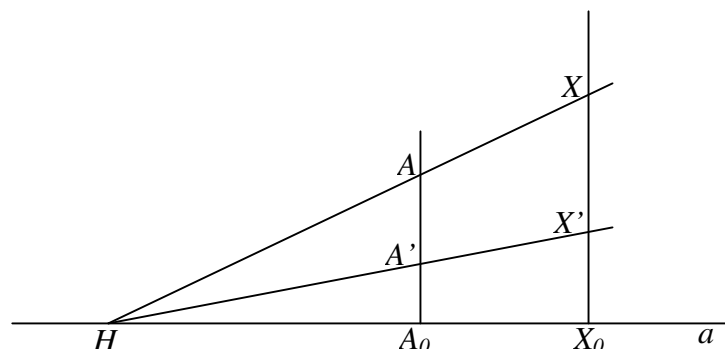
In fatti il suo asse è dato dalla congiungente i punti comuni alle rette corrispondenti  $AB$  e  $A'B'$ ,  $BC$  e  $B'C'$  (si veda la figura).



### L'invariante

Se  $X$  e  $X'$  si corrispondono nell'affinità omologica  $A_0(a; A, A')$ , detti  $A_0$  e  $X_0$  i punti nei quali le rette  $AA'$  e  $XX'$  incontrano l'asse, risultano uguali i rapporti semplici:

$$\frac{A_0A}{A_0A'} = \frac{X_0X}{X_0X'} = k$$



Poiché le rette omologhe  $AX$  e  $A'X'$  s'incontrano in un punto,  $H$ , dell'asse  $a$  (come nella figura precedente), le terne  $A, A', A_0$  e  $X, X', X_0$  si ottengono l'una dall'altra mediante *proiezione centrale* da  $H$  sulle rette parallele  $AA'$  e  $XX'$ .

Il valore di  $k$  è quindi caratteristico di ciascuna affinità omologica: per questo se ne dice appunto *caratteristica*.

Prende anche il nome di *invariante* dell'affinità omologica, e vale ad individuarla insieme all'asse  $a$  e alla direzione della retta  $AA'$  (che ne dà il *centro improprio*).

Quando la retta  $AA'$  è parallela all'asse  $a$ , il punto  $A_0$  si porta a distanza infinita e  $k$  assume il valore,

$$k = 1,$$

che appunto compete a un rapporto semplice con il terzo punto improprio.

Si tratta del caso delle *affinità omologica speciale*, poiché questa qualifica si deve ad una omologia affine il cui asse passi per il centro (improprio).

E' di grande interesse il caso della simmetria assiale, per cui è:

$$k = -1.$$

Se  $A$  ed  $A'$  sono simmetrici rispetto alla  $a$ , l'affinità omologica  $\mathcal{A}_0(a; A, A')$  prende il nome di *simmetria assiale*, di *asse*  $a$  e secondo la *direzione* della retta  $AA'$ .

Essendo  $k = -1$  segue che ogni coppia di punti,  $X, X'$ , corrispondenti nella simmetria assiale è costituita da punti da punti simmetrici rispetto alla  $a$ , nella direzione  $AA'$ .