La spinta di Archimede

Uno dei fenomeni che si osservano in natura per via degli effetti della pressione sui corpi è la Spinta di Archimede. Essa si materializza come una forza che si genera su un corpo quando esso si ritrova immerso in un fluido, dove per fluido intendiamo sia gas che liquido.
Ci chiediamo come sia possibile che una nave, nonostante il suo enorme peso, riesca a galleggiare sull'acqua mentre una pietra, anche se estremamente piccola e di peso evidentemente minore, affonda.
Cercheremo di rispondere a questa domanda seguendo un percorso organico che parti dalla definizione di pressione, passando per la legge di Stevin, fino ad arrivare alla conclusione.
Iniziamo definendo la pressione. Quando abbiamo parlato della dinamica abbiamo imparato a conoscere le forze ed il loro effetto sui corpi, inteso essenzialmente come variazione del movimento dello stesso o, per dirla meglio, come variazione della quantità di moto del corpo su cui la forza ha effetto. Ora ci spingiamo un po' oltre e vediamo altri effetti delle forze. Supponiamo di spingere il palmo della mano destra contro quello della sinistra con una certa forza. Sicuramente sentiremo una certa sensazione, cioè ci accorgiamo che qualcosa sta avvenendo, almeno dal punto di vista della nostra percezione fisica. Ora proviamo a fare lo stesso questa volta poggiando la punta di un dito contro il palmo della mano, sempre con la stessa forza. Questa volta ci accorgiamo che l'effetto fisico, inteso come sensazione, cambia, pur mantenendo la stessa forza. Ora magari proviamo a spingere contro il palmo della mano, con la stessa forza dei primi due casi, la punta di un ago. Meglio non provare visto che conosciamo bene quello che sarà l'effetto. A questo punto facciamo il punto della situazione. La forza applicata nei tre casi è la stessa, ma cambia l'effetto "fisico" di questa forza sul palmo della mano, riferendoci ai nostri esempi. Ci accorgiamo che l'effetto si fa via via più "devastante" man mano che spingiamo con un oggetto che abbia superficie minore. Prima il palmo della mano, poi la punta di un dito e, infine, la punta di un ago. Chiamiamo **pressione** questo strano effetto della forza al variare della superficie e lo definiamo in questo modo

$$p = \frac{F_\perp}{S} \tag{1}$$

dove col simbolo $F_\perp$ indichiamo la componente della forza perpendicolare alla superficie *S*.
Ci rendiamo conto che la (1) è una buona definizione di pressione, visto che a parità di forza essa risulta inversamente proporzionale alla superficie su cui è applicata la forza, proprio come nei nostri due casi. Nel Sistema Internazionale di Unità di Misura abbiamo

$$[p] = \frac{[F]}{[S]} = \frac{N}{m^2}$$

A questa unità di misura diamo il nome **Pascal** (*Pa*) (in onore dello scienziato francese che per primo ha studiato la pressione) e specifichiamo che 1 *Pa* è la pressione che esercita una forza di 1 *N* applicata perpendicolarmente ad una superficie di 1 m^2.
Cosa succede all'interno dei liquidi? La (1) può essere modificata ad hoc per rispondere alla nostra domanda. La forza che un liquido esercita, per esempio, sul fondo di un recipiente è praticamente il peso stesso del liquido. Ovviamente risulta semplice determinare il peso del liquido contenuto in un recipiente di modeste dimensioni, ma quando si tratta di laghi o porzioni di mare il peso va determinato in modo diverso, utilizzando il concetto di densità.
Ricordando che il peso di un qualsiasi corpo è

$$P = mg$$

dove m è la massa del corpo e g è l'accelerazione di gravità che sulla Terra vale mediamente $9.81\frac{m}{s^2}$. Considerando la densità abbiamo che $m = dV$, dove V rappresenta il volume del corpo e d la sua densità.
Possiamo dunque riscrivere il peso di un corpo come

$$P = dVg \tag{2}$$

Ora scriviamo la (1) utilizzando il peso di un liquido come forza perpendicolare alla superficie del fondo di un qualsiasi recipiente, che per semplicità scegliamo di forma cilindrica. Abbiamo

$$p = \frac{P}{S} = \frac{dVg}{S} \tag{3}$$

dove S è la misura della superficie del fondo del contenitore cilindrico. Possiamo ancora semplificare la (3) considerando che il liquido, posto nel recipiente cilindrico, ha un'altezza h, dal fondo del recipiente.
Con questa supposizione la (3) diventa

$$p = \frac{dShg}{S} = dhg \tag{4}$$

La (4) è l'espressione della pressione per i liquidi. Da essa risulta evidente che l pressione all'interno di un liquido non dipende dal peso dello stesso o dalla forma del contenitore, ma esclusivamente dalla densità e dall'altezza della colonna di liquido. Se il liquido è uniforme, la pressione all'interno di esso dipende esclusivamente dall'altezza della colonna di liquido, ossia dalla profondità di riferimento. Questo il motivo per cui, ad esempio, le dighe vengono costruite in modo da essere maggiormente tozze o rinforzate man mano che si scende verso la base delle stesse, proprio perché a maggiori profondità devono sopportare pressioni più intense. Queste pressioni generano, in accordo con la (1) forze che sono in ogni punto perpendicolari alla superficie di contatto.
Abbiamo dunque risposto alla domanda di trovare un'espressione per la pressione nel fondo dei liquidi. Ora ci chiediamo cosa accade quando avviene una variazione di pressione. Per esempio, vogliamo sapere se la pressione ad una certa profondità nel mare sia uguale o meno nel caso ci sia o meno l'atmosfera. Ovviamente l'aria che respiriamo ha un suo peso, quindi dovrebbe essa stessa esercitare una certa pressione. È tutto vero, l'aria pesa e, di conseguenza, esercita una pressione sulla Terra, sul mare e su di noi (ed è anche grazie a questa pressione che noi viviamo). Gli astronauti, ad esempio, durante le passeggiate nello spazio hanno bisogno di una speciale tuta nella quale viene riprodotta la stessa pressione presente sulla Terra. Se non fosse così basterebbero semplicemente le bombole da sub, giusto per respirare, ma sappiamo bene che non è così che funziona. Mediamente la pressione atmosferica ha un valore quasi costante (varia di poco) e, a livello del mare, essa vale $p_a = 101000Pa$ (1 *Atm*). È un valore abbastanza elevato, basta rendersene conto calcolando l'equivalente in forza peso applicata ad una superficie di un metro quadro. Quando calcoliamo la pressione sul fondo di un liquido, per esempio nel mare, usiamo la (4) ma non dobbiamo dimenticarci che esiste anche la pressione esercitata dall'atmosfera e che quindi va aggiunta. La (4) diventa

$$p = p_a + dhg$$

Quest'ultima espressione tiene ovviamente conto della pressione atmosferica. Ma essa può essere generalizzata in modo da comprendere una qualsiasi forma di variazione di pressione in questo modo

$$p_2 = p_1 + dhg$$

ossia

$$\Delta p = dhg \tag{5}$$

La (5) mette in risalto le variazioni di pressione. Analizzando la (5) e per la (1) possiamo concludere che ogni variazione di pressione genera un forza che in ogni punto è perpendicolare a qualsiasi superficie (**Principio di Pascal**). La (5), scritta solitamente nell'espressione dell'equazione immediatamente precedente ad essa, prende il nome di **Legge di Stevin**.
Vediamo ora cosa succede ad un corpo immerso in un liquido, cioè andiamo alla ricerca delle cause della spinta di Archimede. Supponiamo di avere un contenitore contenente un qualsiasi liquido nel quale venga immerso un oggetto che per semplicità supponiamo essere di forma cilindrica, alto h e la cui superficie di base misuri S.
Esso sarà sottoposto a pressioni che generano forze perpendicolari ad ogni sua superficie, sia laterale che di base. È relativamente semplice convincersi che le forze lungo la superficie laterale si equivalgono ad ogni livello di profondità per cui, almeno da questo punto di vista, il corpo rimane in equilibrio (se il liquido è fermo il corpo non subisce movimenti orizzontali). L'aspetto rilevante è invece ciò che avviene sulle due superfici di base che, evidentemente, si trovano a due profondità diverse. Chiamiamo S_1 la superficie di base superiore e S_2 quella inferiore. Sulla superficie superiore agisce una forza verso il basso $F_1 = p_1 S_1$, dove con p_1 indichiamo la pressione nel punto in cui si trova la superficie superiore. In modo del tutto analogo, la superficie S_2 risente di una forza verso l'alto $F_2 = p_2 S_2$. Trattandosi di un corpo cilindrico abbiamo $S_1 = S_2 = S$. Ora cerchiamo di operare un bilanciamento dinamico considerando che il corpo ha anche un suo peso P_C. Supponiamo che il corpo immerso resti in posizione di equilibrio. Abbiamo

$$F_2 = F_1 - P_C$$

ossia

$$p_2 S - p_1 S = P_C$$

$$(p_2 - p_1)S = P_C$$

dalla (5) abbiamo

$$dhgS = P_C$$

$$dVg = P_C$$

$$P_L = P_C \tag{6}$$

La (6) ci dice che se c'è condizione di equilibrio allora il peso del liquido che il corpo sposta per immersione uguaglia il peso del corpo stesso. Possiamo affermare quindi che un oggetto immerso in un liquido riceve una spinta pari al peso del liquido che sposta per immersione. Una nave galleggia sull'acqua perché il peso dell'acqua che la parte immersa della nave sposta uguaglia il peso totale della nave. In generale possiamo affermare che il galleggiamento dipende dalle densità relative del liquido e del corpo immerso in esso (che può essere esso stesso un liquido, come l'olio che galleggia sull'acqua). Se la densità del corpo immerso è minore della densità del liquido nel cui il corpo viene immerso allora il corpo galleggerà. Se le due densità sono uguali il corpo sarà in equilibrio dinamico, mentre se la densità del corpo immerso è maggiore di quella del liquido il corpo affonda. Possiamo concludere dicendo che la spinta di Archimede è

$$S_A = d_L V_I g \tag{7}$$

dove indichiamo con S_A la spinta di Archimede, con d_L la densità del liquido, con V_I il volume immerso del corpo e g l'accelerazione di gravità.
La (7) può essere scritta anche considerando il peso specifico del liquido in cui viene immerso il corpo

$$S_A = P_{SL} V_I$$

dove P_{SL} indica il peso specifico del liquido in cui immergiamo il corpo.