

Distribuzioni di probabilità di variabili aleatorie discrete

Introduzione

“*Fortuna Imperatrix Mundi. O Fortuna, velut Luna, statu variabilis¹...*”.

In principio era il caos, dicevano gli antichi Greci ed il Vecchio Testamento faceva eco ricordando che “*la terra era informe e vuota, e le tenebre coprivano la faccia dell’abisso [...]*”². Perciò nacquero i profeti, coloro che vedevano avanti (gli statistici di oggi) e gli indovini. Per passare il tempo e divertirsi gli uomini inventarono i giochi, a cominciare dalla guerra, dove il *caso* regna sovrano.

Secondo alcuni storici i giochi, ed in particolare quelli con i dadi, furono inventati durante la guerra di Troia per distrarre i soldati greci nella snervante attesa dei dieci anni di assedio. Famoso è il vaso che ritrae Achille e Aiace mentre giocano a dadi. Secondo Erodoto (490-480 a.C.) invece furono i Lidi ad inventare il gioco dei dadi, come egli racconta nelle sue storie. Molto probabilmente il grande storico dice il vero visto che in greco i Lidi sono detti *Λυδοί* ed in latino gioco si dice *ludus*. Il termine greco per dado è *κῦβος*, cioè *cubo*, e ciò vuol dire che i Greci non si erano accorti che un dado è qualcosa di più di un cubo (geometrico), è un cubo con le facce segnate: è ciò che oggi chiamiamo *variabile aleatoria*.

Ci poniamo nell’ottica del porsi e risolvere problemi prendendo spunto da un argomento che offre la possibilità di stabilire forti legami tra matematica e realtà. Infatti, uno dei grossi problemi che presenta la matematica insegnata nelle scuole superiori è proprio il non essere abbastanza legata alla vita di tutti i giorni. Hermann Maier dice che “*la parte nettamente predominante di oggetti, concetti, operazioni e procedimenti che gli allievi incontrano durante le lezioni di matematica, non ha alcuna relazione con la loro vita reale (extra-scolastica)*”³.

Ma dobbiamo specificare che il fatto che la matematica sia un qualcosa che sta al di fuori della vita di tutti i giorni è un’idea che si forma lo studente per vari motivi e che non intendiamo trattare in questa relazione. Tant’è vero che vedremo in questo lavoro come la vita extra-scolastica è impregnata di matematica.

L’argomento di questa relazione trae ispirazione proprio da episodi di vita quotidiana e vuole dimostrare come a volte è proprio l’ignoranza (ossia il ritenere la matematica “staccata” dal mondo) che ci spinge a compiere gesti che hanno del paradossale.

Ci riferiamo a tutto quel che è successo, nel bene ma soprattutto nel male, a proposito del ritardo del numero 54 all’estrazione del lotto sulla ruota di Venezia. Ricordiamo brevemente che c’è stato chi ha subito grossissime perdite, ritenendo a torto maggiore la probabilità che un numero possa essere estratto casualmente (su un insieme di 90 numeri) se la sua estrazione nel tempo presenta un ritardo consistente.

Quindi il nostro scopo è quello di presentare un percorso disciplinare sulle distribuzioni di probabilità di variabili aleatorie, regolarmente inserito nei programmi di matematica del quinto anno di quasi tutte le scuole secondarie, prendendo spunto da una situazione concreta come può essere quella del gioco del lotto.

¹ Celebre ritornello dei *Carmina Burana* di Wagner.

² Libro della Genesi 1:2.

³ Hermann Maier, *Apprendimento della matematica. Difficoltà e modalità per superarle*.

Mappa disciplinare

Presentiamo la mappa disciplinare DST (a distillazione verticale) relativa al singolo percorso didattico delle distribuzioni di probabilità di variabili aleatorie discrete.

Sequenza operativa	ARGOMENTI	ore	tipo
1	Assiomi della probabilità	0	PRQ
1	Teorema dell'addizione delle probabilità		PRQ
1	Teorema del prodotto delle probabilità		PRQ
1	Teorema delle probabilità composte		PRQ
1	Formula della probabilità totale		PRQ
1	Teorema delle ipotesi		PRQ
1	Breve storia della probabilità		2
1	Variabili aleatorie discrete	1	DEF
1	Funzione densità di probabilità di una variabile aleatoria discreta		DEF
1	Funzione di ripartizione o di distribuzione di una variabile aleatoria discreta		DEF
2	La funzione di distribuzione è monotona non decrescente		DIM
1	Media e varianza di una variabile aleatoria discreta		DEF
1	Variabile aleatoria bernoulliana		1
2	La densità di probabilità della variabile aleatoria bernoulliana (*)	DIM	
1	Funzione di ripartizione della variabile aleatoria bernoulliana	EN	
1	Calcolo della media della variabile aleatoria bernoulliana	DIM	
1	Calcolo della varianza della variabile aleatoria bernoulliana	DIM	
1	Lancio di una moneta	SPERIM	
1	Variabile aleatoria binomiale	1	DEF
2	La densità di probabilità della variabile aleatoria binomiale (*)		DIM
1	Funzione di ripartizione della variabile aleatoria binomiale		EN
2	Calcolo della funzione di ripartizione della variabile aleatoria binomiale		DIM
1	Media della variabile aleatoria binomiale		EN
2	Calcolo della media della variabile aleatoria binomiale		DIM
1	Varianza della variabile aleatoria binomiale		EN
1	Probabilità di successo al test di patente B		SPERIM
1	Variabile aleatoria geometrica	1	DEF
2	La densità di probabilità della variabile aleatoria geometrica (*)		DIM
1	Funzione di ripartizione della variabile aleatoria geometrica		EN
2	Calcolo della funzione di ripartizione della variabile aleatoria geometrica		DIM
1	Media della variabile aleatoria geometrica		EN
2	Calcolo della media della variabile aleatoria geometrica		DIM
1	Varianza della variabile aleatoria geometrica		EN
2	Calcolo della varianza della variabile aleatoria geometrica		DIM
2	Teorema della perdita della memoria (*)		DIM
1	Centrare una combinazione vincente alla slot machine		SPERIM
1	Variabile aleatoria poissoniana	1	DEF
2	La densità di probabilità della variabile aleatoria poissoniana (*)		DIM
1	Funzione di ripartizione della variabile aleatoria poissoniana		EN

2	Calcolo della funzione di ripartizione della variabile aleatoria poissoniana		DIM
1	Media della variabile aleatoria poissoniana		EN
2	Calcolo della media della variabile aleatoria poissoniana		DIM
1	Varianza della variabile aleatoria poissoniana		EN
2	Calcolo della varianza della variabile aleatoria poissoniana		DIM
1	Probabilità di transito di automobili ad un casello in un certo tempo		SPERIM
Variabile aleatoria ipergeometrica			
1	La densità di probabilità della variabile aleatoria poissoniana	1	DEF
1	Estrazione di biglie senza reimmissione	1	EN
1	Estrazione di biglie senza reimmissione	1	SPERIM
1	Probabilità di fare un terno al lotto su una ruota	1	SPERIM
Probabilità di fare un terno al lotto su tutte le ruote			
1	Probabilità di fare un terno al lotto su tutte le ruote	0.5	SPERIM
1	Probabilità di estrarre un numero al lotto che presenta ritardo	0.5	SPERIM

Nella precedente tabella abbiamo indicato con (1) gli argomenti del programma “debole” e con (2) gli argomenti del programma “forte”. Gli asterischi (*) indicano l’opzionalità dell’argomento, nel nostro caso si tratta di dimostrazioni abbastanza complicate.

PRQ = prerequisiti; ST = percorso storico; EN = solo enunciato; DEF = definizione; DIM = dimostrazione; SPERIM = esperimenti e/o esercizi particolari.

Per brevità svilupperemo in modo dettagliato solamente la distribuzione bernoulliana e binomiale, dando una semplice scaletta contenutistica per tutte le altre distribuzioni.

Tratteremo alla fine del lavoro il problema dell’estrazione di un numero al lotto avente un grande ritardo (caso del 54 della ruota di Venezia), mostrando che la probabilità di estrazione non dipende dal ritardo ed è uguale per tutti gli altri 89 numeri.

Breve storia della probabilità

Obiettivi

L'obiettivo è quello di rendere più semplice il percorso che gli alunni faranno nello studio di questo particolare argomento. L'utilizzo in classe di un approccio di tipo storico favorisce senz'altro la concezione di una matematica dinamica, che si è andata sviluppando nel corso della storia assieme al suo artefice: l'uomo.

Altro particolare obiettivo vuole essere quello di presentare una matematica come cultura, che si sposa con lo stile di vita dell'uomo che fa la storia. Fin dall'antichità la matematica è stata al servizio del genere umano: possiamo pensare alle grandi opere costruite dagli egiziani, dai greci, dai romani, ecc... Ogni civiltà si è servita della matematica per scopi che oggi definiremo di natura pratica. Qualche esempio: la matematica come strumento per l'ingegneria edile (le piramidi); come strumento per le guerre (i famosi *specchi ustori* di Archimede); come strumento per l'arte (le prospettive, le proporzioni, ecc...); come strumento per l'economia (stime, previsioni, ecc...). In sintesi possiamo dire che la matematica è sempre stata considerata come un *modello* capace di descrivere al meglio la realtà.

Metodologie

La storia può essere presentata in una lezione frontale da due ore. Per evitare la frammentazione del percorso storico che ci ha portato fino ai giorni d'oggi sarebbe meglio presentare tutta la parte storica in unica soluzione, quindi evitando di richiamarla argomento per argomento. Sarebbe molto interessante un eventuale supporto audio-visivo, ma questo dipende dalla disponibilità di materiale scolastico. Per questa fase è indispensabile la stesura di una dispensa da consegnare agli alunni. Inoltre l'interesse verso la storia della probabilità può essere accresciuta assegnando a piccoli gruppi di alunni compiti di ricerca (approfondimenti) su specifici momenti storici o su personaggi che hanno fatto la storia di questo ramo della matematica. Questo materiale prodotto può essere poi condiviso con gli altri gruppi.

Contenuti

In questa fase ci limitiamo ad elencare quelli che possono essere le tappe principali di questo percorso storico, evitando di sviluppare una tesina troppo elaborata e pesante.

- **L'età dei poeti** (Erodoto, Lucrezio, Cicerone, Villon, Dante, Machiavelli, ecc...);
- **Il rinascimento della matematica** (Cardano, Galilei);
- **I coefficienti binomiali** (Méré, Pascal, Pacioli, Tartaglia, Fermat, Huygens, Leibniz, Lloyd);
- **L'illuminismo** (Montmort, G. Bernoulli, Moivre, D. Bernoulli, Simpson, Bayes, Leclerc, Euler);
- **Prima metà dell'ottocento** (Gauss, Adrian, Laplace, Simon, Brown, Helmut, Poisson);
- **Seconda metà dell'ottocento** (Lobacevski, Bunyakovski, Ostrogradski, Maxwell, Boole, Venn, Cebysev, Bortkiewicz);
- **Fisici e biologi protagonisti** (Hilbert, Boltzmann, Einstein, Born, Ehrenfest, Capaldo, Mendel, Markov, Rutherford, Bateman, Geiger);
- **I fondamenti ed il teorema centrale** (Cebysev, Markov, Lindeberg, Bernstein, Feller, Mises, Cantelli, Poincaré, Jeffreys, Borel, De Finetti, Russel, Kolmogorov, Fermi, Neumann, Ulam);
- **Los Alamos** (La bomba atomica e l'uso vitale dei calcolatori per la simulazione di fenomeni casuali).

Variabili aleatorie discrete

Obiettivi

L'obiettivo principale di questa parte introduttiva è quello di fornire lo studente di un potente mezzo per operare al meglio l'analisi statistica, cioè utilizzare in modo appropriato e corretto le variabili aleatorie.

Ci poniamo, dunque, in situazioni in cui è estremamente importante e indispensabile scegliere la variabile aleatoria in modo opportuno, per quelli che naturalmente saranno i nostri scopi (porsi e risolvere problemi, evidentemente di natura probabilistica).

In questa prima fase vengono legati in modo coerente ed espressivo diversi concetti matematici che l'alunno già conosce, come il concetto di funzione, di probabilità, di crescita, ecc... Quindi, un'altro obiettivo è quello di dare coerenza e importanza a tutti quegli argomenti che concorrono nell'analisi statistica che, derivanti da ambiti diversi, spesso sono visti dagli alunni come a sé stanti (compartimenti stagni). Quindi, un altro obiettivo è quello di presentare una visione unitaria ed utilitaristica della matematica (cioè apprezzarne l'armonia).

Metodologie

Questi argomenti vanno trattati in classe attraverso una classica lezione frontale di un'ora. Diventa comunque opportuno interagire in modo diretto con gli allievi in modo che essi non possano sentirsi in nessun caso soggetti passivi.

Quindi il professore, durante la lezione, stimolerà l'attenzione della classe ponendo domande di che richiamino argomenti precedentemente trattati (come gli assiomi della probabilità, proprietà, ecc...) e porrà l'accento sull'importanza degli strumenti matematici (teorie già incontrate) sulle quali evidentemente si basa il discorso.

In fine, sono previsti esercizi esemplificativi che prendono spunto da episodi di vita reale (anche la scelta del particolare esercizio va fatta in modo tale che l'esempio stesso a cui ci si riferisce possa essere il più possibile "attraente" ed interessante).

Contenuti

I fenomeni aleatori o casuali nel loro evolversi spesso danno come risultato dei numeri, che nel gergo quotidiano di solito chiamiamo *numeri casuali*, proprio perché non siamo in grado di determinarli a priori.

Ad esempio, una persona che gioca una determinata combinazione al lotto vuole contare il numero di vincite che riesce ad ottenere in 20 estrazioni consecutive. In questo caso, il numero di vincite sarà il numero casuale di nostro interesse (e non dobbiamo escludere che questo numero sia 0, il che vuol dire nessuna vincita nelle 20 estrazioni considerate).

Parliamo di *variabile aleatoria* per indicare l'insieme di questi numeri casuali a cui abbiamo fatto precedentemente riferimento.

Formalmente abbiamo a che fare con uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$ ⁴ e una funzione X che evidentemente avrà come dominio lo spazio degli eventi elementari possibili Ω e come immagine l'insieme dei numeri reali, che rappresenta i nostri numeri casuali.

$$X : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$$

Dobbiamo notare che il calcolo delle probabilità non ha come fine lo studio di funzioni, piuttosto lo studio delle distribuzioni per mezzo di funzioni che operano su di esse. Pertanto non ci interessa lo studio intrinseco di X , ma quanto la sua distribuzione sull'asse reale.

⁴ Ω è un insieme, $\mathcal{P}(\Omega)$ è l'insieme delle parti di Ω e P è la funzione probabilità tale che $P: \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$.

Ad esempio, possiamo chiederci con quale probabilità la funzione X sia minore o maggiore di un dato numero reale x . Se riusciamo ad estendere questo modello per ogni x reale potremo avere a disposizione un potente strumento matematico per studiare le distribuzioni.

Definizione: dato uno spazio di probabilità $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega), P)$, una funzione X si dice *variabile aleatoria* se è del tipo

$$X : \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$$

ed è tale che

$$\{X \leq x\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\} \in \mathcal{P}(\Omega), \quad \forall x \in \mathfrak{R}$$

Notiamo che se a e b sono due numeri reali per cui risulta $a < b$ abbiamo che

$$\{a < X < b\} = \{X < b\} \cap \{X > a\}$$

Definizione: Una variabile aleatoria X si dice *discreta* se l'insieme dei valori che essa può assumere è discreto:

$$X : \Omega \rightarrow S \subset \mathfrak{R}$$

dove $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$ è un sottoinsieme discreto dell'insieme dei numeri reali.

Esempio: In una stanza vengono installati 3 rilevatori antincendio, ognuno dei quali funziona con probabilità del 70% (i rilevatori funzionano in modo indipendente).

Consideriamo come variabile aleatoria X il numero di rilevatori che funzionano nel momento del bisogno.

In questo caso l'insieme Ω è formato da tre elementi ω_i ($i = 1, 2, 3$) che assumeranno il valore $\{A\}$ se si attivano ed il valore $\{S\}$ se non si attivano.

$$\Omega = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3) : \omega_i \in \{A, S\}\}$$

Lo scopo del nostro esercizio è di trovare le probabilità legate a tutti possibili casi, relativi alle 24 ($= 2^3$) possibili combinazioni.

Per comodità possiamo considerare la seguente tabella:

ω_1	ω_2	ω_3	X
A	A	A	3
A	A	S	2
A	S	A	2
A	S	S	1
S	A	A	2
S	A	S	1
S	S	A	1
S	S	S	0

Calcoliamo qual è la probabilità che siano tutti e tre contemporaneamente accesi (1 caso su 8):

$$P[X = 3] = 1 * (0.7 * 0.7 * 0.7) = 0.343$$

Calcoliamo la probabilità che solo due dei rilevatori si accendano (3 casi su 8):

$$P[X = 2] = 3 * (0.7 * 0.7 * 0.3) = 0.441$$

Calcoliamo la probabilità che se ne accenda uno solo (3 casi su 8):

$$P[X = 1] = 3 * (0.7 * 0.3 * 0.3) = 0.189$$

Calcoliamo la probabilità che non se ne accenda nessuno (1 caso su 8):

$$P[X = 0] = 1 * (0.3 * 0.3 * 0.3) = 0.027$$

Con questo semplice esempio possiamo apprezzare la grande l'utilità delle variabili aleatorie.

Definizione: Sia X una variabile aleatoria discreta i cui valori possibili sono $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, con $S \subset \mathcal{R}$. Chiamiamo con

$$P[X = x_i] = p(x_i), \quad p : S \rightarrow [0,1]$$

la funzione densità di X .

Proprietà:

1. La funzione densità è non negativa: $p(x_i) \geq 0, \forall i$.
2. La funzione densità ha come somma 1:

$$P\left[\bigcup_i \{X = x_i\}\right] = \sum_i P[X = x_i] = \sum_i p(x_i) = 1$$

Infatti, dall'esempio precedente notiamo come $0.343 + 0.441 + 0.189 + 0.027 = 1$.

Definizione: Sia X una variabile aleatoria discreta i cui valori possibili sono $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, con $S \subset \mathcal{R}$. Chiamiamo con

$$F(x_i) = P[X \leq x_i] = \sum_{k=1}^i p(x_k)$$

la funzione di ripartizione o di distribuzione della variabile aleatoria X .

Proprietà: La funzione di ripartizione di X è monotona non decrescente.

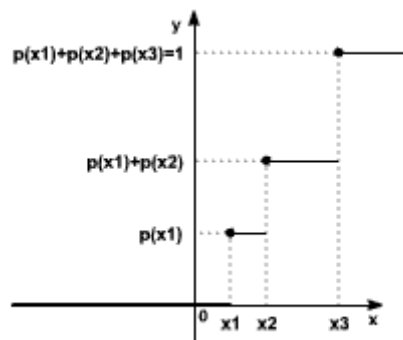
Dimostrazione: dobbiamo dimostrare che $\forall x, y \in S$, se $x \leq y$ allora $F(x) \leq F(y)$.

Sia $x \leq y$ e consideriamo i due insiemi $A = \{\omega : X(\omega) \leq x\}$ e $B = \{\omega : X(\omega) \leq y\}$. Dall'ipotesi $x \leq y$ segue evidentemente che $A \subseteq B$ e, ricordando i teoremi sulle probabilità, risulta $P(A) \leq P(B)$, da cui segue facilmente che $F(x) \leq F(y)$, per come abbiamo definito A e B .



Esempio: Sia X una variabile aleatoria discreta che ammette le seguenti probabilità:

$x_1 \rightarrow p(x_1), x_2 \rightarrow p(x_2), x_3 \rightarrow p(x_3)$, dove le $p(x)$ è la funzione densità di probabilità di X . Il grafico della funzione di ripartizione $F(x)$ sarà il seguente:



5

Definizione: Sia X una variabile aleatoria che assume valori da un insieme $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Chiamiamo valore medio di X , o valore atteso, la quantità

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^n x_i p(x_i)$$

Nell'esempio dei tre rilevatori antincendio abbiamo che $S = \{0, 1, 2, 3\}$. Quindi, secondo la definizione di valer medio otteniamo:

$$\bar{x} = 0 * 0.027 + 1 * 0.189 + 2 * 0.441 + 3 * 0.343 = 2.1$$

⁵ Da grafico si vede che la funzione di ripartizione $F(x)$ risulta essere continua a destra. La dimostrazione è stata omessa.

Una volta ottenuto il valor medio di una variabile aleatoria, siamo interessati alla misura di quanto i vari valori che assume la variabile aleatoria si discostano da questa media, cioè una misura della loro *dispersione*. Quindi abbiamo bisogno della seguente

Definizione: Sia X una variabile aleatoria che assume valori da un insieme $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ e sia \bar{x} il suo valor medio. Si dice *varianza di X* la quantità

$$\text{Var}(X) = \sigma^2(X) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

Definizione: La grandezza $\sigma(X) = \sqrt{\sigma^2(X)}$ si dice *deviazione standard della variabile aleatoria X* .

Sempre riferendoci all'esempio dei rilevatori antincendio possiamo calcolare la varianza della variabile aleatoria seguendo le indicazioni della definizione:

$$\sigma^2(X) = \frac{1}{4} \left[(0 - 2.1)^2 + (1 - 2.1)^2 + (2 - 2.1)^2 + (3 - 2.1)^2 \right] = 1.61$$

Se vogliamo calcolare la deviazione standard basta estrarre la radice del risultato ottenuto, cioè $\sigma(X) = 1.27$.

Variabile aleatoria bernoulliana

Obiettivi

Un primo obiettivo lo possiamo considerare generico, cioè che vale per tutte le distribuzioni che tratteremo in questo percorso matematico. Parliamo della divisione delle variabili aleatorie in diverse *famiglie*, a seconda delle caratteristiche che la stessa presenta. L'obiettivo è quindi quello di presentare una matematica organizzata in *pacchetti* coerenti i cui componenti godono di alcune proprietà comuni.

Per quanto riguarda proprio la variabile aleatoria bernoulliana l'obiettivo principale è quello di fornire uno strumento con cui possiamo gestire l'*andamento* di alcuni processi altamente casuali, come può essere il risultato ottenuto nel lancio di una moneta o nel lancio di un dado.

Metodologie

Per quanto riguarda questo argomento è sufficiente la classica lezione frontale. Infatti, non è previsto l'uso di strumentazione particolare data la semplicità e l'ovvietà della trattazione. Bastano, infatti, le conoscenze di base sul semplice calcolo delle probabilità, date come prerequisito.

Contenuti

L'esperimento classico, che è anche quello più semplice, è quando abbiamo a che fare con un insieme Ω contenente solo due elementi (per esempio testa o croce nel lancio di una moneta). In generale diciamo che l'insieme $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$.

Definizione: Una variabile aleatoria X è bernoulliana se può assumere esclusivamente due valori, cioè descrive il verificarsi o meno di un evento.

Supponiamo che la variabile aleatoria bernoulliana X assuma il valore 1 se si verifica un certo evento e il valore 0 se l'evento non si verifica. Inoltre possiamo ipotizzare che la probabilità che un evento si verifichi è p , di conseguenza il non verificarsi dell'evento ha probabilità $q = 1 - p$.

A questo punto resta definita la densità di probabilità della variabile aleatoria bernoulliana X in questo modo:

$$P[X = 1] = p(1) = p \text{ e } P[X = 0] = p(0) = 1 - p$$

Proposizione: La definizione precedente è effettivamente una densità di probabilità.

Dimostrazione: Dobbiamo dimostrare che la probabilità che in totale o un evento si verifichi oppure no è massima, cioè 1.

Basta mostrare quindi che

$$P[X \in \mathfrak{X}] = P[X = 0] + P[X = 1] = p(0) + p(1) = (1 - p) + p = 1$$

◆

Se una variabile aleatoria X è bernoulliana allora la possiamo indicare in questo modo:

$$X \sim \text{Bern}(p),$$

dove p è la probabilità che un evento si verifichi.

Per come abbiamo definito la funzione distribuzione di una variabile aleatoria, possiamo scrivere quella relativa ad una variabile aleatoria X bernoulliana come segue:

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - p & 0 \leq x < 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases}$$

Il valor medio di una variabile aleatoria bernoulliana è

$$\bar{x} = \sum_{i=1}^2 x_i p(x_i) = 0 * (1-p) + 1 * (p) = p$$

e la varianza risulta essere

$$\sigma^2(X) = m(x^2) - \bar{x}^2 = (1-p) * 0^2 + p * 1^2 - p^2 = p - p^2 = p(1-p)^6$$

Esercizio: vogliamo studiare come si distribuisce la probabilità di vincita nel lancio di una moneta non truccata.

Per prima cosa scegliamo in modo opportuno la variabile aleatoria X . Notiamo subito che le possibilità sono due: o si vince o si perde; quindi, a buona ragione, possiamo considerare questa variabile come binaria, cioè che può assumere il valore 1 in caso di vincita ed il valore 0 in caso di perdita.

Inoltre, sappiamo che la probabilità che nel lancio di una moneta esca testa o croce è uguale, appunto perché abbiamo considerato una moneta non truccata. Questa probabilità è pari a $\frac{1}{2}$ ($p = q$).

Scriviamo la nostra variabile aleatoria X in questo modo:

$$X = \begin{cases} 1 \\ 0 \end{cases}$$

La densità di probabilità relativa ad ognuno dei due eventi possibili è:

$$P[X = 1] = \frac{1}{2} \text{ e } P[X = 0] = \frac{1}{2}$$

Proviamo adesso a calcolare il valor medio di X :

$$\bar{x} = 0 * \frac{1}{2} + 1 * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

quindi abbiamo trovato che il, valor medio di X è proprio p (dove p è la probabilità che l'evento vincente si verifichi).

Adesso calcoliamo la varianza:

$$\sigma^2(X) = \frac{1}{2} \left[\left(0 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 \right] = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) = \frac{1}{4}$$

che è proprio uguale a $p(1-p)$.

Possiamo concludere dicendo che la variabile aleatoria X così definita è bernoulliana.

⁶ abbiamo utilizzato la formula $\sigma^2(X) = m(x^2) - m(x)^2$, dove $m(-)$ indica il valor medio.

Variabile aleatoria binomiale

Obiettivi

Riconoscere l'evoluzione (previsione) di una serie di dati stocastici quando gli stessi sono ottenuti da un susseguirsi di esperimenti bernoulliani (del tipo Vero o Falso) indipendenti. Essere, quindi, in grado di scegliere un'opportuna variabile aleatoria che ci consenta di svolgere al meglio questo riconoscimento, per una corretta trattazione dei dati.

Richiamare, in una nuova ottica utilitaristica e collegata alla realtà, concetti astratti già trattati come *coefficiente binomiale, permutazioni, disposizioni, ecc...*

Metodologie

Lezione frontale in classe con dimostrazioni (laddove è possibile) ed esempi tratti dalla vita reale.

Contenuti

A volete non ci accontentiamo di eseguire un esperimento bernoulliano una sola volta. Per esempio vogliamo vedere quante volte otteniamo testa (o croce) lanciando dieci volte una moneta (o lanciando contemporaneamente dieci monete). Ci poniamo nell'ipotesi che i singoli esperimenti bernoulliani siano indipendenti.

In questo caso, scegliamo come variabile aleatoria X il numero di volte che il caso favorevole si presenta. Se, ad esempio, lanciamo un dado per dieci volte e vogliamo contare il numero di volte che otteniamo il valore 6, la nostra variabile aleatoria X potrà avere valori compresi tra 0 e 10, nel senso che l'uscita del numero 6 può verificarsi da un minimo di 0 volte ad un massimo di 10 volte (se siamo a dir poco fortunatissimi).

Se il numero di esperimenti bernoulliani è n allora la variabile aleatoria X potrà avere valori nell'intervallo $[0, n]$, cioè $X \in \{0, 1, \dots, n\}$.

In genere ci chiediamo quante volte k ($k \leq n$) si può verificare un evento favorevole su un totale di n prove bernoulliane. Inoltre, possiamo ipotizzare che la probabilità che l'evento favorevole si verifichi k volte sia p e, in modo complementare, la probabilità che per $n - k$ volte l'evento non si verifichi sarà evidentemente $1 - p$.

Logicamente le k volte che l'evento favorevole si verifica (su un totale di n prove) possono essere disposte in diversi modi, quindi, è necessario enumerarle tutte.

Otteniamo, dunque, la seguente formula:

$$P[X = k] = p(k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

dove il primo fattore indica il numero delle combinazioni di k su n , cioè in quanti modi possono essere disposti i k eventi favorevoli su un totale di n prove. Il secondo fattore indica la probabilità che l'evento favorevole si verifichi esattamente k volte e il terzo fattore indica la probabilità che l'evento non si verifichi per le rimanenti $n - k$ volte. Infatti, noi stiamo chiedendo che l'evento favorevole si verifichi precisamente k volte (e non almeno k volte).

Proposizione: *La formula trovata è una densità di probabilità.*

Dimostrazione:

$$\begin{aligned} P[X \in \mathfrak{R}] &= P[X \in \{0, 1, \dots, n\}] = \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = [p + (1-p)]^n = 1^n = 1 \end{aligned}$$

Infatti, questa è proprio la formula della potenza n -esima di un binomio (formula del binomio di Newton⁷). I termini del binomio sono rispettivamente p e $1 - p$

Definizione: La variabile aleatoria X descritta prende il nome di variabile aleatoria binomiale e ha due parametri: ◆

- il numero n di prove bernoulliane da effettuare;
- la probabilità p di successo di ogni prova.

Indichiamo X in questo modo:

$$X \sim \text{Bin}(n, p)$$

Calcoliamo la funzione di ripartizione di X :

$$F(x) = P[X \leq x] = \sum_{k=0}^x \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

per ogni $0 \leq x \leq n$

Adesso calcoliamo il valor medio di X :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \sum_{k=0}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n k \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \binom{n}{k+1} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} = \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) \frac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!} p^{k+1} (1-p)^{n-k-1} = np \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-1)!}{k!(n-k-1)!} p^k (1-p)^{n-k-1} = \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k-1} = np(p+1-p)^{n-1} = np \end{aligned}$$

La varianza di X risulta essere:

$$\sigma^2(X) = np(1-p)$$

Esercizio: Un candidato per la patente B sta compilando il fatidico questionario di 30 domande per ottenere l'idoneità teorica. Ricordiamo che il questionario è composto da 30 domande di tipo vero/falso e l'idoneità si ottiene con meno di 5 errori.

Supponiamo che il candidato non conosca assolutamente alcun argomento teorico, per cui si affida totalmente alla fortuna segnando le risposte (vero/falso) a caso.

Qual è la probabilità che il candidato passi l'esame?

Dalla situazione descritta siamo certi che possiamo scegliere la variabile aleatoria in modo che risulti essere binomiale. Infatti, il fatto di assegnare a caso il valore di verità o di falsità ad una singola affermazione rappresenta un classico esperimento bernoulliano. Tra l'altro, le domande sono tra di loro indipendenti. Consideriamo, dunque, una variabile aleatoria binomiale che conti il numero di successi ottenuti su un totale di 30 domande, cioè il numero di risposte esatte.

In sintesi, poniamo $n = 30$ (il numero delle prove) e $p = \frac{1}{2}$ la probabilità di azzeccare la risposta esatta. In questo modo la nostra variabile aleatoria X sarà

$$X \sim \text{Bin}(30, \frac{1}{2}).$$

Il candidato supererà l'esame se otterrà almeno 25 successi, quindi dobbiamo calcolare

⁷ Diamo per scontato che se ne conosca già la dimostrazione.

$$P[X \geq 25] = \sum_{k=25}^{30} \binom{30}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{30-k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{30} \sum_{k=25}^{30} \binom{30}{k} = 0.00016\%$$

Questo risultato ci dice che sarebbe stato meglio se il candidato fosse restato a casa.

Variabile aleatoria geometrica

Obiettivi

Essere capaci di calcolare la probabilità che un evento di tipo bernoulliano che si verifichi dopo un certo numero di insuccessi consecutivi ottenuti durante la ripetizione dello stesso esperimento.

Prendere coscienza del fatto che la probabilità che un evento possa verificarsi dopo un certo numero di insuccessi non “conserva” la memoria (il senso di questo obiettivo sarà spiegato in seguito, quando parleremo di “perdita della memoria”).

Rendersi conto del fatto che, soprattutto nel gioco d’azzardo, il fatto che un evento ha una certa probabilità di verificarsi non implica che esso certamente si verifichi.

Modalità

Anche in questo caso la lezione è frontale e viene svolta in classe. Viene dato spazio e importanza a esempi provenienti dalla vita di tutti i giorni.

Contenuti

Possiamo supporre di voler eseguire un esperimento bernoulliano tante volte finché non si verifica il primo successo. Nelle nostre ipotesi abbiamo che ogni singolo esperimento deve essere indipendente dagli altri, nel senso che il risultato di ogni esperimento non deve, in nessun modo e caso, influenzare l’esperimento successivo.

Introduciamo una variabile aleatoria X che conti il numero degli insuccessi ottenuti nei vari esperimenti consecutivi. Notiamo chiaramente che questa variabile aleatoria ha un minimo, cioè può assumere come valore minimo 0: in questo caso abbiamo che il successo si verifica al primo esperimento (se siamo molto fortunati!).

Ma è altrettanto semplice intuire che, almeno in teoria, non può esserci un valore massimo che può assumere la X . Infatti, potrebbe succedere che il primo successo non si verifichi mai, pur conducendo un numero infinito di esperimenti.

Quindi la variabile aleatoria X la possiamo pensare come segue:

$$X \in \{0, 1, 2, \dots\},$$

illimitato superiormente.

Supponiamo che sia p la probabilità che si verifichi ogni singolo esperimento bernoulliano. Nel chiederci quale sia la probabilità che X assuma un generico valore k , notiamo che accadono esattamente k insuccessi ed un successo (il primo), quello che arresta il conteggio delle prove.

La funzione densità della variabile aleatoria descritta è

$$p_X(k) = P[X = k] = (1 - p)^k \cdot p, \quad \forall k \geq 0, k \in \mathbb{N}$$

Proposizione: *La funzione appena definita è effettivamente una densità.*

Dimostrazione:

$$P[X \in \mathfrak{R}] = P[X \in \mathbb{N}_0] = \sum_{k=0}^{\infty} P[X = k] = \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p)^k p = p \sum_{k=0}^{\infty} (1 - p)^k = p \frac{1}{1 - (1 - p)} = 1$$

Infatti, p volte una serie geometrica di ragione $(1 - p)$ converge all’unità.



Definizione: La variabile aleatoria formalmente descritta sopra prende il nome di variabile aleatoria geometrica. Se indichiamo con p la probabilità di successo della singola prova bernoulliana, possiamo indicare X in questo modo:

$$X \sim \text{Geom}(p)$$

Calcoliamo la funzione di ripartizione di X :

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \sum_{k=0}^x P[X = k] = \sum_{k=0}^x (1-p)^k p = p \frac{1-(1-p)^{x+1}}{1-(1-p)} = 1 - (1-p)^{x+1}, \forall x \geq 0$$

Adesso calcoliamo il valor medio e la varianza di X :

$$\begin{aligned} m(X) &= \sum_{x=0}^{\infty} xp(1-p)^x = p \sum_{x=0}^{\infty} x(1-p)^x = p \sum_{x=0}^{\infty} (x+1)(1-p)^{x+1} = \\ &= p(1-p) \sum_{x=0}^{\infty} x(1-p)^x + p(1-p) \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x \equiv p \sum_{x=0}^{\infty} x(1-p)^x \Rightarrow p^2 \sum_{x=0}^{\infty} x(1-p)^x \equiv p(1-p) \sum_{x=0}^{\infty} (1-p)^x \\ &\Rightarrow p \sum_{x=0}^{\infty} x(1-p)^x \equiv \frac{1-p}{1-(1-p)} = \frac{1-p}{p} \end{aligned}$$

Per ricavare la varianza dobbiamo prima calcolare il valor medio $m(X^2)$:

$$\begin{aligned} m(X^2) &= \sum_{x=0}^{\infty} x^2 p(1-p)^x = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 p(1-p)^x = \sum_{x=0}^{\infty} (x+1)^2 p(1-p)^{x+1} = \\ &= (1-p) \left[\sum_{x=0}^{\infty} x^2 p(1-p)^x + 2 \sum_{x=0}^{\infty} xp(1-p)^x + \sum_{x=0}^{\infty} p(1-p)^x \right] = (1-p) [m(X^2) + 2m(X) + 1] \\ &\Rightarrow m(X^2) = \frac{(1-p)[2m(X) + 1]}{p} = \frac{(1-p)(2-p)}{p^2} \end{aligned}$$

quindi, per la varianza abbiamo:

$$\sigma^2(X) = m(X^2) - [m(X)]^2 = \frac{(1-p)(2-p)}{p^2} - \frac{(1-p)^2}{p^2} = \frac{2-3p+p^2-1-p^2+2p}{p^2} = \frac{1-p}{p^2}$$

Supponiamo che un esperimento bernoulliano abbia già dato n insuccessi. Vogliamo calcolare la probabilità che lo stesso esperimento dia ancora m insuccessi, per un totale di $n+m$ insuccessi. Abbiamo il seguente

Teorema: La probabilità che un esperimento bernoulliano restituisca $m+n$ insuccessi, dopo che se ne siano verificati già n , è indipendente dagli n insuccessi iniziali.

Questo teorema è una prerogativa delle variabili aleatorie geometriche ed è anche conosciuto come *teorema della perdita della memoria*.

Infatti, è come se la variabile aleatoria si “dimenticasse” di ciò che è avvenuto in precedenza.

Questo teorema è molto importante nell’ottica del gioco d’azzardo o nel gioco del lotto. Infatti, il teorema ci assicura che la probabilità di ottenere una vincita in un esperimento bernoulliano non dipende dal ritardo accumulato in precedenza. Se noi volessimo tentare di estrarre un determinato numero da un insieme di novanta numeri diversi (con reimmissione), la probabilità di estrarlo è

uguale, sia alla prima estrazione, sia che siano state già effettuate mille estrazioni con altrettanti insuccessi.

Dimostrazione:

dobbiamo utilizzare le proprietà della probabilità condizionata:

$$P[X \geq m+n | X \geq n] = \frac{P[X \geq m+n, X \geq n]}{P[X \geq n]} = \frac{P[X \geq m+n]}{P[X \geq n]} = \frac{(1-p)^{m+n}}{(1-p)^n} = (1-p)^m = P[X \geq m]$$

Infatti, si ha che

$$P[X \geq k] = (1-p)^k$$

◆

Esempio: Un giocatore d'azzardo ha 10 gettoni da utilizzare per giocare alla slot machine. La probabilità di centrare una combinazione vincente è del 10%. Ad ogni vincita il giocatore non ottiene ulteriori gettoni, ma gli viene direttamente pagata la vincita. Qual è la probabilità che riesca ad ottenere il primo successo coi dieci gettoni, cioè prima che i gettoni finiscano?

Evidentemente il giocatore deve ottenere la sua prima vincita entro le prime 10 giocate. Scegliamo la variabile aleatoria X in modo che possa contare il numero di insuccessi consecutivi ottenuti (logicamente prima di ottenere la prima vincita). Per come l'abbiamo considerata, la nostra variabile aleatoria è geometrica e con parametro $p = 0.1$ (probabilità di vincere del 10%).

Dobbiamo, quindi, calcolare la probabilità che il numero di insuccessi sia al massimo 9, cioè che il giocatore ottenga la prima vincita almeno alla decima giocata (cioè all'ultima possibilità):

$$P[0 \leq X \leq 9] = F_X(9) = 1 - (1 - 0.1)^{10} = 0.6513 = 65.13\%$$

Come dobbiamo leggere questo risultato? Abbiamo ottenuto che la probabilità di vincere dopo 9 giocate fallimentari è superiore al 50%, cioè con buona probabilità il giocatore otterrà la sua prima vincita entro le prime 10 giocate. E' un po' come dire *più gettoni hai più hai probabilità di vincere*. E' importante notare che l'insieme dei valori che X può assumere non si limita al numero 10. Infatti, teoricamente è illimitato superiormente nel senso che il giocatore, dopo aver ottenuto 10 insuccessi, potrebbe ancora chiedere gettoni. Questo sta a significare che, non essendoci un limite superiore al numero di insuccessi, il giocatore potrebbe anche non vincere mai, cioè non avrà mai l'assoluta certezza di una vincita.

Ma la cosa più importante da notare è che questa particolare variabile aleatoria obbedisce al teorema della perdita della memoria, quindi, a buon intenditore poche parole...

Variabile aleatoria poissoniana

Obiettivi

Essere capaci di calcolare la probabilità che un evento di tipo binomiale, avente probabilità di successo molto piccola, si verifichi nello svolgimento di un numero considerevole di prove.

Rendersi conto di come, in molti casi, la probabilità del verificarsi di un singolo evento possa diminuire all'aumentare del numero di esperimenti effettuati.

Metodologie

Lezione frontale.

Contenuti

Capita spesso, nelle situazioni reali, di avere a che fare con un esperimento di tipo binomiale, con n molto grande e con probabilità di successo p molto piccola. Tipicamente p decresce al crescere di n , pertanto possiamo definire un nuovo parametro λ tale che

$$\lambda = np \Rightarrow p = \frac{\lambda}{n}$$

dunque, prenderemo in considerazione la seguente variabile aleatoria:

$$X \sim \text{Bin}\left(n; \frac{\lambda}{n}\right), n \rightarrow \infty, \lambda > 0$$

Determiniamo la funzione densità di questa variabile aleatoria:

$$\begin{aligned} p_X(k) = P[X = k] &= \binom{n}{k} \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{\lambda^k}{n^k} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = \\ &= \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} \end{aligned}$$

Dato che possiamo considerare n molto grande, operiamo un passaggio al limite per $n \rightarrow \infty$:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_X(k) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} \frac{\lambda^k}{k!} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}$$

A questo punto possiamo fare delle precisazioni di carattere matematico come, ad esempio, che il limite di un prodotto è uguale al prodotto dei limiti. Per questo avremo:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{n^k} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^k}{n^k} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^k}{k!} = \frac{\lambda^k}{k!}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n = e^{-\lambda}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k} = 1$$

Quindi, possiamo concludere che:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} p_X(k) = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}, \forall k \geq 0$$

Proposizione: La densità di probabilità appena calcolata è effettivamente una densità di probabilità.

Dimostrazione:

$$P[X \in \mathfrak{R}] = P[X \in N_0] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{\lambda} e^{-\lambda} = 1$$

Infatti, la serie considerata è quella esponenziale di argomento λ .

◆

Definizione: La variabile aleatoria X così considerata prende il nome di variabile aleatoria poissoniana di parametro λ :

$$X \sim \text{Poisson}(\lambda).$$

Determiniamo ora la funzione di ripartizione della variabile aleatoria X :

$$F_X(x) = P[X \leq x] = \sum_{k=0}^x \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^x \frac{\lambda^k}{k!}$$

Calcoliamo il valore medio di X :

$$\bar{x} = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \sum_{x=1}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-1)!} = \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x+1} e^{-\lambda}}{x!} = \lambda \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = \lambda e^{\lambda} e^{-\lambda} = \lambda$$

Adesso calcoliamo la varianza:

$$\begin{aligned} \sigma^2(X) &= m(X^2) - \lambda^2 = \sum_{x=1}^{\infty} x^2 \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} - \lambda^2 = \sum_{x=1}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{(x-1)!} - \lambda^2 = \sum_{x=0}^{\infty} (x+1) \frac{\lambda^{x+1} e^{-\lambda}}{x!} - \lambda^2 = \\ &= \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^{x+1} e^{-\lambda}}{x!} + \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^{x+1} e^{-\lambda}}{x!} - \lambda^2 = \lambda \sum_{x=0}^{\infty} x \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} + \lambda \sum_{x=0}^{\infty} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} - \lambda^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \end{aligned}$$

Esempio: Ad un ben determinato casello autostradale transitano, in media, 50 automobili ogni ora. Calcolare la probabilità che in 5 minuti transitino almeno 2 automobili.

Introduciamo una variabile aleatoria X che conti il numero di automobili che transitano al casello. Poiché il numero di automobili nel nostro Paese è molto levato, cioè n è molto grande, ma la probabilità che ognuna di essa transiti proprio in questo casello è molto bassa, cioè p è molto piccolo, X non sarà una variabile aleatoria binomiale ma poissoniana.

Se scegliamo il minuto come unità di tempo abbiamo:

$$\lambda \cdot t = 50 \Rightarrow \lambda \cdot 60 = 50 \Rightarrow \lambda = \frac{5}{6}$$

La probabilità richiesta, tenendo conto che dobbiamo considerare un tempo di 5 minuti, cioè 5λ , è:

$$\begin{aligned} P[X \geq 2] &= 1 - P[X < 2] = 1 - p(0) - p(1) = 1 - \left[\frac{\left(\frac{25}{6}\right)^0}{0!} \right] e^{-\frac{25}{6}} - \left[\frac{\left(\frac{25}{6}\right)^1}{1!} \right] e^{-\frac{25}{6}} = \\ &= 1 - e^{-\frac{25}{6}} - \frac{25}{6} e^{-\frac{25}{6}} = 0.92 = 92\% \end{aligned}$$

Variabile aleatoria ipergeometrica

Obiettivi

Questa particolare variabile aleatoria è molto interessante per quello che riguarda lo studio delle probabilità di vincite in alcuni giochi popolari come il gioco del lotto.

L'obiettivo è quindi quello di saper trattare gli andamenti delle probabilità di vincita nel gioco del lotto, o di qualsiasi altro gioco di estrazione (come la tombola) in cui gli esperimenti sono di tipo bernoulliano ma non indipendenti, cioè senza reimmissioni.

Metodologie

Lezione frontale e svolgimento partecipato di esercizi presi da situazioni reali di gioco.

Contenuti

Nel definire la variabile aleatoria binomiale avevamo posto la condizione che tutte le prove bernoulliane fossero indipendenti. Se facciamo cadere questa ipotesi dovremo riformulare la densità di probabilità in modo diverso, cioè tenendo conto di questo aggiustamento.

Ipotizziamo di dover effettuare r prove non indipendenti con probabilità di successo p per ciascuna prova. Vogliamo calcolare la probabilità che si abbiano k successi.

Possiamo notare che p , essendo una probabilità, può essere vista come un rapporto tra casi favorevoli e casi totali:

$$p = \frac{n}{n+m}$$

dove è evidente che n sono i casi favorevoli e m i casi contrari (entrambi in un'unica prova bernoulliana).

Anche la funzione densità può essere vista come casi favorevoli su casi totali: i casi totali sono le combinazioni degli $n + m$ casi sulle r prove; i casi favorevoli sono tanti quanto sono le prove in cui si hanno successi (k) (di conseguenza si avranno anche $n - k$ insuccessi).

$$p_X(k) = P[X = k] = \frac{\binom{n}{k} \binom{m}{r-k}}{\binom{n+m}{r}}, \quad k \leq \min\{n, r\}, r \leq n+m$$

Definizione: La variabile aleatoria così definita prende il nome di variabile aleatoria ipergeometrica. I suoi parametri sono r , n ed m , rispettivamente il numero delle prove, i casi favorevoli per ogni singola prova ed i casi contrari per ogni singola prova.

$$X \sim \text{Hyper}(r, n, m)$$

Esempio: Un'urna contiene 3 biglie rosse, 2 biglie verdi e 1 biglia blu. Qual è la probabilità che, effettuando 4 estrazioni senza reimmissione, si peschino 2 biglie rosse?

Abbiamo 4 prove bernoulliane del tipo {"biglia estratta rossa", "biglia estratta non rossa"} non indipendenti tra loro (poiché non si ha la reimmissione nell'urna della biglia estratta). Pertanto si può modellizzare il problema con una variabile aleatoria ipergeometrica. La variabile aleatoria X

conterà il numero di biglie rosse estratte dall'urna. Le prove da effettuare sono $r = 4$, i casi favorevoli della singola prova bernoulliana sono $n = 3$, quelli contrari sono $m = 2 + 1$:

$$X \sim \text{Hyper}(4, 3, 3)$$

Calcoliamo la probabilità richiesta:

$$P[X = 2] = \frac{\binom{3}{2} \binom{3}{4-2}}{\binom{3+3}{4}} = \frac{3 \cdot 3}{15} = \frac{3}{5} = 0.6 = 60\%$$

Esempio: Calcoliamo la probabilità di centrare un terno al lotto su una determinata ruota.

Abbiamo un numero di prove bernoulliane e non indipendenti pari a $r = 5$, cioè 5 estrazioni dalla stessa urna e senza reimmissione dei numeri. I casi favorevoli sono $n = 3$, cioè i numeri giocati (che si spera possano essere estratti), mentre i casi contrari sono $m = 87$, cioè tutti i numeri restanti, su un totale di $n + m = 90$ numeri. Si vogliono ottenere precisamente 3 successi, cioè $k = 3$. Consideriamo una variabile aleatoria X che conti il numero dei successi k . La variabile aleatoria così definita è ipergeometrica.

Calcoliamo la probabilità di ottenere come valore di X proprio 3 su 5 prove non indipendenti, cioè la probabilità di centrare un terno al lotto.

$$P[X = 3] = \frac{\binom{3}{3} \binom{87}{2}}{\binom{90}{5}} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{90 \cdot 89 \cdot 88} = \frac{60}{704880} = 0.000085$$

Vediamo che questa probabilità è molto bassa, come facilmente ci si aspettava.

Esempi particolari

In questa ultima sezione ci vogliamo occupare di due classici esempi ispirati dal gioco del lotto. Il primo riguarda la probabilità di centrare un terno al lotto su tutte le ruote, mentre nel secondo tratteremo il problema dell'estrazione di un numero avente un certo ritardo. In questo secondo esempio faremo vedere come il ritardo non influisce in nessun modo la probabilità di estrazione del numero stesso.

Infatti, mostreremo che qualsiasi numero ha la stessa probabilità di essere estratto. Ad ogni nuova estrazione si riparte “da zero” nel senso che ogni combinazione risulta equiprobabile.

La credenza popolare secondo cui un numero che presenta un forte ritardo ha maggiori probabilità di essere estratto rispetto ad altri è assolutamente priva di alcun fondamento matematico. Spesso si tira in ballo la legge dei grandi numeri in modo del tutto inappropriato.

La legge dei grandi numeri ci dice che quando il numero di esperimenti è molto elevato allora la frequenza con cui si verifica un evento favorevole tende alla probabilità che l'evento stesso si verifichi. Ma ciò non significa che se la probabilità di estrarre un numero al lotto è di $1/90$ allora nelle prime 90 estrazioni sicuramente uscirà il numero in questione! La legge dei grandi numeri ci dà informazioni su una tendenza, ma nulla ci dice riguardo al periodo nel quale avviene la convergenza della frequenza verso la probabilità. Potrebbe benissimo succedere che un numero non venga estratto per mille anni per poi essere estratto talmente tante volte da verificare la legge dei grandi numeri, magari su un intervallo temporale di qualche milione di anni.

Crediamo che sia doveroso fornire questi strumenti agli alunni per far sì che non si commettano più gravi errori (c'è stata gente che si è visto costretto a vendere la casa per sanare debiti di gioco), frutto a volte dell'ignoranza o a causa di credenze popolari prive di alcun rigore matematico.

Esempio: Calcoliamo la probabilità di centrare un terno al lotto su tutte le ruote (nel senso che ci sia almeno una delle 11 ruote nella quale viene centrato il terno).

Abbiamo calcolato in precedenza la probabilità di centrare un terno su una singola ruota e abbiamo ottenuto un valore per $p = 0.000085$. Adesso introduciamo una nuova variabile aleatoria X che conti il numero di successi (cioè il numero dei terni). Le estrazioni su ognuna delle ruote sono intese come 11 esperimenti bernoulliani indipendenti. Ogni singolo esperimento bernoulliano avrà come valore “terno centrato” oppure “terno non centrato”. Una variabile aleatoria così costruita sarà di tipo binomiale. Siamo interessati al caso in cui otteniamo un singolo successo su un totale di 11 prove bernoulliane indipendenti, cioè un terno su una delle 11 ruote.

La nostra probabilità sarà:

$$P[X = 1] = \binom{11}{1} p^1 (1-p)^{11-1} = 11 \cdot 0.000085 \cdot 0.999915^{10} = 0.00093$$

che è evidentemente più alta rispetto a quella di centrare un terno su una singola ruota (infatti viene pagato meno).

Esempio: Calcoliamo la probabilità di estrarre un singolo numero al lotto in diversi casi.

Primo caso: L'estrazione in esame è la prima in assoluto.

Abbiamo un insieme di $n + m = 90$ numeri di cui $n = 1$ sono i casi favorevoli e $m = 89$ sono i casi contrari. Le estrazioni a disposizione sono $r = 5$ e gli esperimenti bernoulliani (“numero estratto”, “numero non estratto”) sono non indipendenti in quanto non c'è reimmissione dei numeri estratti

nell'urna. La variabile aleatoria che conterà il numero di successi che si verificheranno (al massimo uno nelle 5 prove) è evidentemente ipergeometrica.

Calcoliamo la probabilità di ottenere un successo ($k = 1$):

$$P[X = 1] = \frac{\binom{1}{1} \binom{89}{4}}{\binom{90}{5}} = \frac{5}{90} = 0.056 = 5.6\%$$

Secondo caso: Calcoliamo la probabilità di estrarre un numero su una ruota che presenta un ritardo di 100 estrazioni.

Vogliamo quindi sapere qual è la probabilità di una vincita dopo che si sono verificati 100 fallimenti.

La variabile aleatoria dovrà quindi contare il numero di fallimenti e fermarsi nel momento in cui compare la prima vincita. Sarà, dunque, una variabile aleatoria geometrica.

La probabilità che il numero venga estratto l'abbiamo già calcolata ed è $p = 0.056$.

La probabilità richiesta sarà:

$$P[X \leq 100] = 1 - (1 - p)^{101} = 0.997 = 99.7\%$$

Dobbiamo stare molto attenti a questo risultato. Pur essendoci una probabilità molto alta che il numero venga estratto dopo 100 insuccessi consecutivi, dobbiamo ricordarci che l'insieme dei valori che può assumere la variabile aleatoria è superiormente illimitato, cioè, pur essendo raro, potrebbe succedere che il numero non venga mai estratto.

Ma c'è di più. Il teorema della perdita della memoria ci dice una cosa interessante e da non sottovalutare, perché sta lì la chiave del discorso.

Se dopo le 100 estrazioni, per altre 20 estrazioni il numero non dovesse essere estratto, allora la probabilità che venga estratto tenendo conto del ritardo precedentemente accumulato sarebbe pari alla probabilità di estrarlo dopo il ritardo delle 20 estrazioni, quindi automaticamente si perderebbe la memoria dei 100 fallimenti. Questo discorso ci fa capire che alla fine dei conti, volendo considerare estrazione per estrazione, ogni numero ha la stessa probabilità di essere estratto, indipendentemente dal ritardo che si porta dietro: ogni estrazione è storia a sé.