Equazioni irrazionali

Un'equazione del tipo $\sqrt[n]{f(x)} = g(x)$ è detta *equazione irrazionale* poiché l'incognita è presente sotto il segno di radice, ossia nel radicando.

Un'equazione irrazionale si risolve facilmente elevando ambo i membri alla potenza *n*-esima, ossia alla potenza pari all'indice della radice, prestando molta attenzione a dei piccoli inconvenienti che potrebbero dar vita a soluzioni dette *spurie*, evidentemente non accettabili. Tali casi, se esistono, si presentano esclusivamente quando l'indice della radice è un numero pari, come nel caso della radice quadrata.

Le cause vanno ricercate nella non iniettività della funzione potenza ad esponente pari. È risaputo, infatti, che un numero a elevato, per esempio, al quadrato da origine ad un numero a^2 positivo che risulta essere lo stesso anche nel caso in cui il numero da elevare al quadrato fosse $-a$. Da ciò discende una pressoché totale perdita di informazione, nel caso di passaggio inverso (dalla potenza alla radice), di ciò che era il numero primordiale generatore della potenza.

Il problema, come già accennato, <u>non sussiste</u> nel caso di *n* dispari.

A puro titolo di esempio, risolviamo la seguente equazione irrazionale:

$$\sqrt{2x-3} - 3 + x = 0.$$

Per prima cosa riscriviamo l'equazione separando ai due membri il radicale dal resto dell'espressione:

$$\sqrt{2x-3} = 3 - x.$$

Elevando al quadrato i due membri otteniamo:

$$2x - 3 = 9 - 6x + x^2,$$

la quale non è altro che una semplice equazione di secondo grado intera, che subito andiamo a risolvere (si omettono i calcoli per semplicità):

$$x^2 - 8x + 12 = 0.$$

Le due soluzioni sono:

$$x_1 = 2 \ \vee \ x_2 = 6.$$

A questo punto, memori di quanto detto in precedenza, dobbiamo seriamente chiederci se le due soluzioni ottenute siano entrambe valide o se tra esse ce n'è qualcuna spuria.

Infatti, eseguendo una semplice prova, ci accorgiamo che <u>la sola soluzione $x_1 = 2$ soddisfa l'equazione irrazionale</u> di partenza. $x_2 = 6$ invece, rendendo negativo il risultato della radice ($\sqrt{9} = -3$ è impossibile nei numeri reali), risulta essere una soluzione spuria, quindi da scartare.

Diversi tipi di equazioni irrazionali

Un'equazione irrazionale può presentarsi in diverse forme, ossia con un numero di radicali che può essere tranquillamente maggiore di uno. Ciò comporta un maggior numero di calcoli per ricondurre, dopo alcuni passaggi, il problema alla risoluzione della forma trattata in precedenza.

Il nostro scopo è quindi quello di escogitare metodi che ci permettano di ricondurre la situazione problematica verso qualcosa di già noto, quindi risolvibile. Questo è un po' il procedere tipico del matematico puro.

Equazioni radicali tipiche, escluso il tipo già trattato, sono le seguenti:

1. $\sqrt{A(x)} \pm \sqrt{B(x)} = C(x)$;
2. $\sqrt{A(x)} \pm \sqrt{B(x)} = \sqrt{C(x)} \pm D(x)$;
3. $\sqrt{A(x)} \pm \sqrt{B(x)} = \sqrt{C(x)} \pm \sqrt{D(x)}$.

<u>Caso 1</u>

Elevando ambo i membri al quadrato, l'equazione diventa:

$$A(x) + B(x) \pm 2\sqrt{A(x)B(x)} = [C(x)]^2,$$

quindi, elevando ancora al quadrato, dopo aver riordinato i membri, si ottiene:

$$4A(x)B(x) = A(x)^2 + B(x)^2 + [C(x)]^4 + 2A(x)B(x) - 2A(x)[C(x)]^2 - 2B(x)[C(x)]^2,$$

e semplificando:

$$2A(x)B(x) = A(x)^2 + B(x)^2 + [C(x)]^4 - 2A(x)[C(x)]^2 - 2B(x)[C(x)]^2.$$

Quella ottenuta è un'equazione di grado probabilmente superiore al secondo, le cui soluzioni, come già detto, vanno controllate.

I casi 2 e 3 sono facilmente riconducibili al caso 1, previo adeguati calcoli (elevamenti al quadrato successivi). Lasciamo al lettore volenteroso lo sviluppo di tali casi.

Prof. Dr. Valerio CURCIO