

Appunti di topologia su \mathbf{R}

Intervalli

DEFINIZIONE: Un **intervallo** è un qualsiasi sottoinsieme di numeri reali, sia esso limitato, illimitato, finito o infinito.

Intervalli finiti ed infiniti

DEFINIZIONE: Un intervallo si dice **finito** se è composto da un numero finito di elementi. Se gli elementi sono infiniti l'intervallo si dice **infinito**.

Intervalli limitati

DEFINIZIONE: Un intervallo si dice **limitato** se lo stesso ha come estremi due numeri reali finiti a e b (con $a < b$).

DEFINIZIONE: Un intervallo limitato si dice **aperto** se tutti i numeri x in esso contenuti sono tali che:

$$a < x < b,$$

e si indica con i simboli:

$$(a, b) \text{ oppure }]a, b[.$$

DEFINIZIONE: Un intervallo limitato si dice **chiuso** se tutti i numeri x in esso contenuti sono tali che:

$$a \leq x \leq b,$$

e si indica con il simbolo:

$$[a, b].$$

DEFINIZIONE: Un intervallo limitato si dice **aperto a sinistra** se tutti i numeri x in esso contenuti sono tali che:

$$a < x \leq b,$$

e si indica con i simboli:

$$(a, b] \text{ oppure }]a, b].$$

DEFINIZIONE: Un intervallo limitato si dice **aperto a destra** se tutti i numeri x in esso contenuti sono tali che:

$$a \leq x < b,$$

e si indica con i simboli:

$$[a, b) \text{ oppure } [a, b[.$$

I numeri a e b si dicono rispettivamente **estremo inferiore** ed **estremo superiore** dell'intervallo.

DEFINIZIONE: Si definisce **raggio** dell'intervallo la quantità:

$$\frac{b - a}{2}.$$

DEFINIZIONE: Si definisce **centro** dell'intervallo la quantità:

$$\frac{a + b}{2}.$$

La **misura** dell'intervallo è data invece dalla quantità $b - a$.

Gli intervalli limitati hanno come immagine geometrica dei segmenti.

Intervalli illimitati

Sia a un numero reale finito qualsiasi.

DEFINIZIONE: Si definisce **intervallo chiuso illimitato superiormente** e di estremo inferiore a , l'insieme di tutti i numeri x così formato:

$$\{x \text{ tali che } x \in \mathbf{R}, x \geq a\},$$

e si indica con i simboli:

$$[a, +\infty) \text{ oppure } [a, +\infty[.$$

DEFINIZIONE: Si definisce **intervallo aperto illimitato superiormente** e di estremo inferiore a , l'insieme di tutti i numeri x così formato:

$$\{x \text{ tali che } x \in \mathbf{R}, x > a\},$$

e si indica con i simboli:

$$(a, +\infty) \text{ oppure }]a, +\infty[.$$

DEFINIZIONE: Si definisce **intervallo chiuso illimitato inferiormente** e di estremo superiore a , l'insieme di tutti i numeri x così formato:

$$\{x \text{ tali che } x \in \mathbf{R}, x \leq a\},$$

e si indica con i simboli:

$$(-\infty, a] \text{ oppure }]-\infty, a].$$

DEFINIZIONE: Si definisce **intervallo aperto illimitato inferiormente** e di estremo superiore a , l'insieme di tutti i numeri x così formato:

$$\{x \text{ tali che } x \in \mathbf{R}, x < a\},$$

e si indica con i simboli:

$$(-\infty, a) \text{ oppure }]-\infty, a[.$$

Gli intervalli illimitati hanno per immagine geometrica delle semirette.

DEFINIZIONE: Tra gli intervalli illimitati bisogna tener conto del **continuo lineare \mathbf{R}** , che si indica coi simboli:

$$(-\infty, +\infty) \text{ oppure }]-\infty, +\infty[.$$

L'immagine geometrica del continuo lineare è tutta la retta reale.

Maggioranti e minoranti

DEFINIZIONE: Un intervallo E si dice **limitato superiormente** se esiste un numero reale finito b che risulta essere maggiore di qualsiasi elemento di E , cioè se:

$$\exists b \in \mathbf{R} \text{ t. c. } \forall x \in E : x \leq b.$$

DEFINIZIONE: Un numero reale b di cui sopra si dice **maggiorante** di E .

È possibile che un intervallo non possieda alcun maggiorante. In tal caso abbiamo che E è illimitato superiormente.

OSSERVAZIONE: il più piccolo tra tutti i maggioranti di E coincide con l'estremo superiore dell'insieme E .

DEFINIZIONE: Se l'insieme E (limitato o illimitato) è chiuso superiormente, allora il suo estremo superiore è detto anche **massimo** dell'insieme E .

Analogamente:

DEFINIZIONE: Un intervallo E si dice **limitato inferiormente** se esiste un numero reale finito a che risulta essere più piccolo di qualsiasi elemento di E , cioè se:

$$\forall x \in E : x > a.$$

DEFINIZIONE: Un numero reale a di cui sopra si dice **minorante** di E .

È possibile che un intervallo non possieda alcun minorante. In tal caso abbiamo che E è illimitato inferiormente.

OSSERVAZIONE: il più grande tra tutti i minoranti di E coincide con l'estremo inferiore dell'insieme E .

DEFINIZIONE: Se l'insieme E (limitato o illimitato) è chiuso inferiormente, allora il suo estremo inferiore è detto anche **minimo** dell'insieme E .

OSSERVAZIONE: in un intervallo finito esistono sempre il massimo ed il minimo.

TEOREMA: *Se un insieme E ammette estremo superiore, questo è **unico**.*

Dimostrazione:

Siano s e t due estremi superiori dell'insieme E . Nell'ipotesi assurda che essi siano distinti, dovrebbe essere necessariamente $s < t$, oppure $s > t$. Nel primo caso, dovendo essere l'estremo superiore il più piccolo dei maggioranti di E , risulta che s non è più estremo superiore, visto che, per definizione, è t il più piccolo maggiorante di E . Nel secondo caso, risulta che t non è più estremo superiore, visto che, sempre per definizione, è s il più piccolo maggiorante di E . Da ciò risulta che deve essere necessariamente $s = t$.

TEOREMA: *Se un insieme E ammette estremo inferiore, questo è **unico**.*

La dimostrazione è del tutto analoga a quella vista nel teorema precedente, quindi viene omessa.

TEOREMA: *Ogni insieme non vuoto E di numeri reali, superiormente limitato, ammette l'estremo superiore.*

TEOREMA: *Ogni insieme non vuoto E di numeri reali, inferiormente limitato, ammette l'estremo inferiore.*

Intorni di un punto

DEFINIZIONE: Si chiama **intorno completo** di un numero reale (o di un punto) c , un qualsiasi intervallo aperto che contenga c .

DEFINIZIONE: Un intervallo aperto U di raggio δ si dice **intorno circolare** di c se si può indicare nella forma seguente:

$$U \equiv (c - \delta, c + \delta),$$

e risulta essere l'insieme degli $x \in R$ tali che:

$$|x - c| < \delta.$$

DEFINIZIONE: Si dice **intorno destro** del numero reale c , ogni intervallo, aperto a destra, che abbia c come estremo inferiore.

DEFINIZIONE: Si dice **intorno sinistro** del numero reale c , ogni intervallo, aperto a sinistra, che abbia c come estremo superiore.

DEFINIZIONE: Si chiama **intorno di infinito** ogni insieme di numeri reali il quale contenga tutti i numeri reali x soddisfacenti ad una disequaglianza del tipo $|x| > k$, con k numero convenientemente scelto.

Punti di accumulazione

DEFINIZIONE: Un punto c si dice che è un **punto di accumulazione** dell'insieme E quando in ogni intorno di c cadono infiniti punti di E .

OSSERVAZIONE: Se l'insieme E è finito, ossia se contiene un numero finito di punti, allora E è sprovvisto di punti di accumulazione.

OSSERVAZIONE: L'insieme vuoto è sprovvisto di punti di accumulazione.

TEOREMA (di Bolzano): *Ogni insieme limitato ed infinito E di numeri reali, ammette almeno un punto di accumulazione.*

OSSERVAZIONE: Ogni insieme infinito E di numeri reali, ammette sempre almeno un punto di accumulazione, in un punto reale finito o all'infinito.

DEFINIZIONE: Un punto c che appartenga ad un insieme E , ma che non sia punto di accumulazione di E , si chiama **punto isolato** di E .

OSSERVAZIONE: Se c è un punto isolato di E , esiste almeno un intorno di c che non contiene punti di E distinti da c (contiene solo c).

Punti interni, esterni e di frontiera

DEFINIZIONE: Sia E un sottoinsieme di R . Tutti i punti di R che non appartengono ad E costituiscono un insieme che si chiama il **complementare** di E (rispetto a R).

DEFINIZIONE: Un punto c si dice **interno** all'insieme E se esiste almeno un intorno di c il quale sia interamente costituito da punti che appartengono ad E .

DEFINIZIONE: Un punto c si dice **esterno** all'insieme E se esiste almeno un intorno di c il quale non contenga alcun punto di E , vale a dire sia completamente costituito da punti dell'insieme complementare di E .

DEFINIZIONE: Un punto c si dice **punto di frontiera** per l'insieme E se non è né interno né esterno ad E , vale a dire, se in un qualsiasi intorno di c , cade almeno un punto di E ed almeno un punto del complementare di E .

DEFINIZIONE: Si definisce **frontiera** di un insieme numerico E l'insieme di tutti i punti che sono di frontiera per E .

Bibliografia:

G. Zwirner, L. Scaglianti *Pensare la Matematica, vol.3* – CEDAM

Prof. Dr. Valerio CURCIO