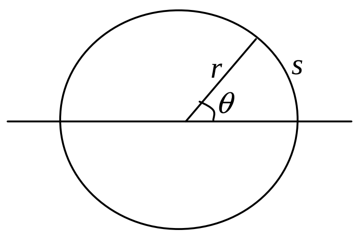
Moto Circolare

Definiamo come moto circolare quello compiuto da un punto materiale che si muove con traiettoria circolare. Se la velocità di rivoluzione è costante in modulo si parla di Moto Circolare Uniforme (MCU). Esso è un'estensione del Moto Rettilineo Uniforme (MRU). Infatti il MCU può essere pensato come un MRU per il quale il punto materiale percorre un tratto rettilineo pari alla lunghezza della circonferenza a velocità scalare costante.

L'angolo espresso in radianti

Nello studio dei moti circolari è utile esprimere gli angoli in radianti. Data una circonferenza di raggio *r*, si definisce radiante l'angolo aperto in senso antiorario che sottende l'arco di lunghezza pari al raggio della circonferenza.



Se risulta $s = r$ allora si definisce

$$\theta = \frac{s}{r} = 1 \text{ rad}$$

In generale si dice che l'angolo θ è in radianti se esso è espresso come rapporto tra l'arco e il raggio. In base a quanto detto possiamo costruire una tabella di angoli notevoli espressi in radianti.

Angolo in gradi	Angolo in radianti
0°	0
30°	$\frac{\pi}{6}$
45°	$\frac{\pi}{4}$
60°	$\frac{\pi}{3}$
90°	$\frac{\pi}{2}$
180°	π
270°	$\frac{3}{2}\pi$
360°	2π

Moto Circolare Uniforme (MCU)

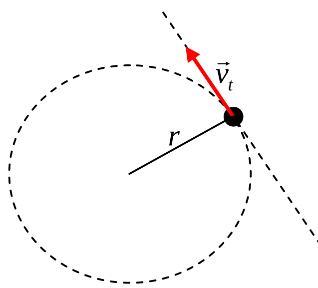
Iniziamo lo studio del MCU alla luce di quanto è stato detto sopra. Consideriamo un punto materiale che si muove con traiettoria circolare di raggio *r* con velocità scalare costante. Supponiamo che esso impieghi il tempo *T* per percorrere un giro completo. Il tempo impiegato dal punto per percorrere l'intero giro si chiama **periodo**.

Il punto materiale percorre archi uguali in intervalli di tempo uguali. In particolare, riferendoci all'arco che rappresenta l'intera circonferenza, per l'uniformità del moto avremo

$$v_t = \frac{2\pi \cdot r}{T},$$

dove v_t è il modulo della **velocità tangenziale**, chiamata così perché rappresenta un vettore che istante per istante ha direzione tangente alla circonferenza nel punto in cui si trova il punto materiale, all'istante considerato. Il verso di tale vettore è quello che indica il senso di percorrenza della circonferenza. Solitamente esso si assume positivo quando il moto avviene in senso antiorario.

La situazione appena illustrata è mostrata nella figura che segue.



Torniamo per un istante al concetto di periodo. Esso rappresenta un tempo particolare, ossia quello impiegato dal punto materiale a percorrere un intero giro. Esiste una nuova grandezza, legata al periodo, che è di enorme importanza per lo studio del MCU e per molto altro. Essa si chiama **frequenza**, che indichiamo con la lettera f, ed è definita come l'inverso del periodo.

$$f = \frac{1}{T} = T^{-1}$$

Nel Sistema Internazionale (SI) essa si misura in *Hertz* (Hz). Si dice che un MCU ha la frequenza di 1Hz se il punto materiale percorre 1 giro in 1 secondo. Per definizione avremo

$$[f] = s^{-1} = \frac{\text{n° giri}}{s} = \text{Hz}.$$

Possiamo ora calcolare la velocità tangenziale in funzione della frequenza in questo modo:

$$v_t = 2\pi \cdot r \cdot f .$$

Non è difficile pensare che man mano che il punto materiale percorre la circonferenza, l'angolo ad esso associato si apre con lo stesso "ritmo". Possiamo dunque definire anche una velocità legata all'angolo che viene aperto al variare del tempo. Se il moto circolare è uniforme, anche l'angolo verrà aperto uniformemente, ossia a velocità costante. Ad ogni arco percorso dal punto materiale è naturalmente associato un angolo sotteso all'arco stesso.

Come abbiamo fatto prima, se consideriamo l'arco corrispondente all'intera circonferenza, possiamo dire che ad esso è associato l'angolo corrispondente che è di 360°, ossia 2π radianti.

Se nel nostro MCU nel tempo T viene percorsa l'intera circonferenza, allora nello stesso tempo viene aperto l'intero angolo giro.

Per quanto detto sopra, definiamo la **velocità angolare** ω la variazione dell'angolo (espresso in radianti) in funzione del tempo. Riferendoci ad un giro completo avremo

$$\omega = \frac{2\pi}{T}.$$

Essendo l'angolo espresso in radianti ed il periodo in secondi, risulta che nel SI l'unità di misura della velocità angolare è

$$[\omega] = \frac{\mathrm{rad}}{s}.$$

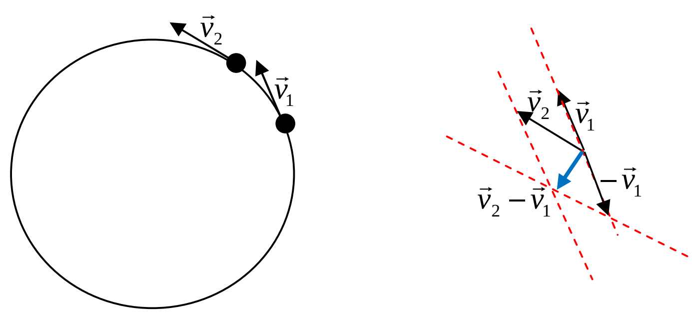
La velocità angolare è un vettore la cui direzione è perpendicolare al piano del moto (tale direzione si ha per via del prodotto vettoriale tra la velocità tangenziale ed il raggio della circonferenza, considerato anch'esso grandezza vettoriale), mentre il verso è quello che avrebbe un cavatappi che ruotasse nello stesso senso del punto materiale (le caratteristiche del prodotto vettoriale sono state già trattate nella dispensa sui vettori, quindi non verrà richiamato qui).
La velocità angolare è ovviamente legata alla velocità tangenziale dalle seguenti relazioni:

$$\omega = \frac{v_t}{r} \text{ e } v_t = \omega \cdot r.$$

Per concludere possiamo collegare la velocità angolare alla frequenza secondo la seguente formula:

$$\omega = 2\pi \cdot f.$$

Finora abbiamo parlato poco del fatto che la velocità tangenziale è un vettore. Quest'aspetto non è affatto da sottovalutare visto che, mentre il suo modulo resta costante (stiamo considerando il fatto che il moto sia circolare uniforme), la sua direzione cambia istante per istante, proprio perché essa è tangente alla circonferenza nel punto in cui si trova il punto materiale, al passare del tempo.
Se la velocità tangenziale cambia nel tempo (e nel nostro caso cambia la sua direzione, pur restando costante il modulo) allora esiste un'accelerazione ad essa legata. Quest'ultima prende il nome di **accelerazione centripeta** poiché, come vedremo tra breve, è sempre diretta verso il centro della circonferenza ed è proprio la responsabile della variazione della direzione della velocità tangenziale.
Guardiamo attentamente la figura seguente.



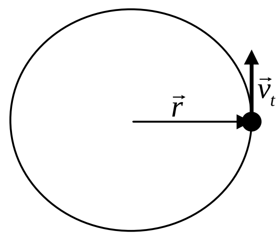
Nell'immagine di sinistra mostriamo il punto materiale con relativa velocità tangenziale in due istanti successivi. Nell'altra immagine invece mostriamo la costruzione del vettore differenza (in blu) delle due velocità tangenziali con il metodo del parallelogramma. Essa è rivolta verso il centro della circonferenza, parallelamente al raggio e, istante per istante, perpendicolare al vettore velocità tangenziale.
L'accelerazione centripeta vettoriale è definita come segue:

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{v}_t}{\Delta t}.$$

L'accelerazione centripeta scritta in forma vettoriale, ossia come sopra, non ci offre una gran possibilità di capirne il modulo. Infatti non dobbiamo confondere l'intervallo infinitesimo di tempo Δt col periodo T, che rappresentano due valori ben diversi.

Fatto salvo il modo per determinare il vettore accelerazione centripeta esposto sopra, inventiamo un metodo semplice ed intuitivo per determinare il modulo di tale vettore.

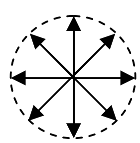
Supponiamo di descrivere, istante per istante, il moto del punto materiale che si muove lungo la circonferenza e immaginiamo di "fermare" il tempo nel preciso istante in cui esso transita per la posizione iniziale, corrispondente all'angolo 0 radianti. Avremo la situazione seguente.



Questa volta abbiamo indicato il raggio della circonferenza come un vettore che è applicato al centro della circonferenza e ha la punta sul punto materiale. Questa notazione ci tornerà utile in seguito.

Osservando attentamente la figura precedente possiamo notare come il vettore $\vec{v}_t$ sia "sfasato" rispetto al vettore $\vec{r}$ di un angolo di 90°, ossia di $\frac{\pi}{2}$ radianti. In termini tecnici si dice che il vettore velocità tangenziale è in "anticipo di fase" rispetto al vettore raggio.

Adesso immaginiamo di fotografare la situazione, come già accennato, ad ogni istante successivo. Chi è in possesso di una buona immaginazione riuscirà senz'altro a capire che mentre il punto materiale percorre l'intera circonferenza, il vettore $\vec{v}_t$, rimanendo sempre perpendicolare al vettore $\vec{r}$, compirà una rotazione completa, ossia di 360° su sé stesso. Avremo una situazione simile:



dove ogni singolo vettore rappresenta $\vec{v}_t$ in diversi istanti di tempo. È ovvio che anche il vettore $\vec{v}_t$ ruota su sé stesso con velocità costante, ossia descrive un moto circolare uniforme. La sua velocità tangenziale, che rappresenta la velocità della velocità, è proprio l'accelerazione centripeta.

Infatti, essa è un vettore tangenziale, quindi perpendicolare a $\vec{v}_t$ e, come risulta chiaro, rispetto a quest'ultima è in anticipo di fase di $\frac{\pi}{2}$ radianti (90°), ossia in anticipo di π radianti (180°) rispetto al vettore raggio $\vec{r}$. Ma questo lo sapevamo già. Infatti, abbiamo già visto precedentemente che il vettore accelerazione centripeta $\vec{a}$ è diretto verso il centro della circonferenza, quindi stessa direzione di $\vec{r}$ ma verso opposto.

Cosa hanno in comune il moto circolare descritto dal punto materiale e l'altro descritto dalla rotazione completa di $\vec{v}_t$? La risposta è semplice e scontata: il periodo! Infatti, nel tempo che il punto materiale impiega a completare un intero giro (periodo), il vettore $\vec{v}_t$ avrà completato un'intera rotazione su sé stesso.

Allora possiamo costruire una proporzione tra i due moti fatta in questo modo:

$$2\pi \cdot r : v_t = 2\pi \cdot v_t : a \, .$$

Infatti, nel moto circolare generato dalla rotazione di $\vec{v}_t$ su sé stesso, proprio quest'ultimo funge da raggio, mentre $\vec{a}$ da velocità tangenziale. Notiamo come i due membri della proporzione rappresentino proprio il periodo T. Semplificando il fattore 2π presente in ambo i membri, ricaviamo semplicemente il modulo di $\vec{a}$. Risulta

$$a \cdot r = v_t \cdot v_t$$

(il prodotto dei medi è uguale al prodotto degli estremi), per cui infine avremo

$$a = \frac{v_t^2}{r} \, .$$

La formula appena scritta rappresenta il modulo del vettore accelerazione centripeta che, come abbiamo avuto modo di dire più volte, è diretto verso il centro della circonferenza del MCU di raggio r.

Se il moto è circolare uniforme il vettore accelerazione centripeta mantiene costante il suo modulo pur variando, istante per istante, la sua direzione (che resta sempre perpendicolare al vettore velocità tangenziale).

Moto circolare non uniforme

Tutto quanto detto continua a valere anche in caso di moto circolare non uniforme, ossia se al passare del tempo varia sia l'intensità del raggio che della velocità tangenziale. In tale caso il modulo di $\vec{a}$ deve essere calcolato istantaneamente, dipendendo ovviamente dal tempo che passa, così come accade per v_t e r. Risulta in tal caso

$$a(t) = \frac{v_t(t)^2}{r(t)} \, ,$$

in quanto la dipendenza dal tempo è imprescindibile.

Più complicato diventa il calcolo della velocità tangenziale in caso di moto circolare non uniforme. Infatti non possiamo più basarci su un periodo in quanto non è detto che un giro completo si svolga nello stesso tempo di un altro, per non parlare del fatto che in giri successivi (o all'interno dello steso giro) il raggio stesso potrebbe cambiare.

Allora ricorriamo alla definizione classica di velocità, ossia quella imparata quando si è parlato di moti vari.

Nel caso del moto circolare non uniforme avremo quindi

$$v_t(\Delta t) = \frac{s(\Delta t)}{\Delta t} \, ,$$

dove con Δt vogliamo indicare un intervallo di tempo infinitesimo (molto piccolo), mentre $s(\Delta t)$ rappresenta la lunghezza dell'arco di circonferenza percorso dal punto materiale nel tempo infinitesimo Δt (con la supposizione che in tale intervallo il raggio rimanga costante).

Con tutte queste supposizioni, senza dover complicare il formalismo matematico associato a tale moto, possiamo definire una velocità tangenziale istantanea, ossia al tempo t, in questo modo:

$$v_t(t) = \frac{s(t)}{t}.$$

Se l'angolo $\theta(t)$ (anch'esso varia nel tempo, quindi dipende da esso) sotteso all'arco $s(t)$ è espresso in radianti (per noi è proprio così), possiamo scrivere

$$s(t) = r(t) \cdot \theta(t),$$

per cui avremo

$$v_t(t) = \frac{r(t) \cdot \theta(t)}{t} = r(t) \cdot \omega(t),$$

dove $\omega(t) = \dfrac{\theta(t)}{t}$ rappresenta la velocità angolare istantanea, e i conti tornano!

Prof. Valerio CURCIO