

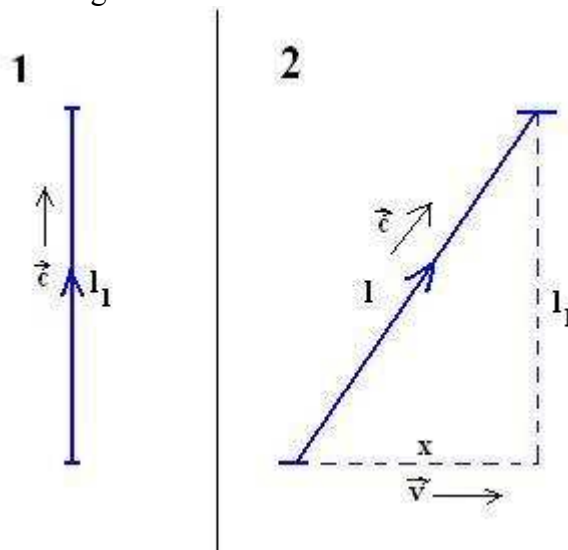
## Elementi di relatività ristretta

Descriviamo in questo breve articolo una situazione che ci permette di comprendere semplicemente il succo della relatività ristretta di Einstein.

Iniziamo subito introducendo il principio fondamentale della costanza della velocità della luce. Questo principio dice che *la velocità della luce ha lo stesso valore  $c$  in ogni sistema di riferimento inerziale*.

Supponiamo adesso che ci sia un oggetto capace di emettere dei segnali luminosi verso l'alto mentre si muove verso destra con velocità  $v$  costante.

Ora immaginiamo di avere due telecamere (due sistemi di riferimento inerziali), una che segue il corpo e l'altra che lo osserva da postazione fissa, ferma rispetto al corpo che si muove. La situazione esposta è mostrata in figura:



Nella figura abbiamo schematizzato la situazione vista dalle due telecamere. La telecamera che segue il corpo vede la situazione 1, mentre quella fissa vede la 2.

La luce viaggia alla velocità costante  $c$  e per il principio esposto all'inizio, essa ha la stessa velocità in entrambe le situazioni esposte in figura.

Chiamiamo  $t_1$  il tempo che impiega la luce a percorrere la distanza  $l_1$  nel sistema 1 e  $t$  il tempo impiegato a percorrere la distanza  $l$  nel sistema 2.

Per quanto riguarda il sistema 1 abbiamo che

$$l_1 = ct_1 \tag{1}$$

Nel sistema 2 invece abbiamo che

$$x = vt \tag{2}$$

e

$$l = ct \tag{3}$$

Osserviamo che la distanza  $l_1$  è la stessa nei due sistemi, quindi otteniamone una relazione in riferimento al sistema 2; usando il teorema di Pitagora:

$$l_1^2 = l^2 - x^2$$

ossia, utilizzando la (1), (2) e (3)

$$c^2 t_1^2 = c^2 t^2 - v^2 t^2$$

$$c^2 t_1^2 = t^2 (c^2 - v^2)$$

$$t_1^2 = t^2 \frac{c^2 - v^2}{c^2}$$

$$t_1^2 = t^2 \left[ 1 - \left( \frac{v}{c} \right)^2 \right] \quad (4)$$

Chiamiamo

$$\gamma = \frac{v}{c}$$

Dalla (4) possiamo estrarre le radici quadrate e ricavare il tempo  $t_1$  relativo al sistema 2:

$$t_1 = t \sqrt{1 - \gamma^2} \quad (5)$$

La (5) mostra come i tempi misurati nei due sistemi di riferimento sono differenti. Il tempo relativo al sistema 1 scorre più lentamente del tempo relativo al sistema 2.

Vediamo cosa succede per quanto riguarda le distanze. Inserendo la (5) nella (1) abbiamo:

$$l_1 = ct \sqrt{1 - \gamma^2} \quad (6)$$

Ora eliminiamo  $c$  dalla (6) utilizzando la (3):

$$l_1 = l \sqrt{1 - \gamma^2} \quad (7)$$

La (7) dice che nel sistema 1 le distanze in direzione del moto subiscono un accorciamento.

## Simultaneità degli eventi

Supponiamo di avere due fratelli Alfa e Beta che decidono di fare un esperimento sulla simultaneità degli eventi in due sistemi di riferimento diversi.

Supponiamo che Alfa resti fermo sulla Terra e Beta si muova in linea retta con una navicella spaziale alla velocità costante  $v$ .

Prima di partire i due fratelli costruiscono due orologi identici che sfruttano segnali luminosi. L'orologio è formato da una stecca verticale di lunghezza  $l$  alla quale estremità sono fissati due specchi che hanno il compito di far "rimbalzare" un fascio luminoso emettendo un click a ogni rimbalzo. I due sincronizzano gli orologi costruiti prima di partire e, dopo averne testato la sincronia, Beta entra nella navicella e parte alla velocità costante  $v$ , mentre Alfa resta sulla Terra col suo orologio.

Vediamo adesso cosa succede agli orologi di Alfa e Beta. Alfa vedrà il proprio orologio continuare a scorrere regolarmente come prima della partenza di Beta. Allo stesso tempo, Beta nella sua navicella continua a vedere il suo orologio procedere regolarmente come quando era ancora sulla Terra. Fin qua nulla di anormale, ma vogliamo spingerci oltre e vedere come Alfa, fermo sulla Terra, vede scorrere il tempo nell'orologio di Beta che si sta muovendo (ammettendo che Alfa possa continuamente osservare Beta durante il suo moto con un potente telescopio).

Il fascio di luce dell'orologio di Alfa, da specchio a specchio percorrerà la distanza  $l$  data da

$$l = c \cdot t \tag{8}$$

dove  $c$  è la velocità della luce e  $t$  è il tempo impiegato dalla luce a percorrere la distanza  $l$ , misurato da Alfa.

Mentre Beta continua il suo moto, Alfa vede la stecca dell'orologio di Beta spostarsi, nel tempo  $t$  di un tratto  $x$  pari a

$$x = v \cdot t \tag{9}$$

dove  $v$  è la velocità della navicella di Beta.

Questo significa che il fascio di luce dell'orologio di Beta, per l'osservazione di Alfa, dovrà percorrere uno spazio maggiore rispetto a  $l$  (l'ipotenusa di un triangolo rettangolo), cioè uno spazio  $l'$  pari a

$$l' = \sqrt{l^2 + x^2}$$

e, utilizzando la (8) e la (9) si ha

$$l' = \sqrt{c^2 t^2 + v^2 t^2}$$

Manipolando un po' abbiamo

$$l' = ct \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}}$$

Questo significa che il tempo impiegato dalla luce nell'orologio di Beta a rimbalzare da specchio a specchio, secondo Alfa è

$$t' = \frac{l'}{c} = t \sqrt{1 + \frac{v^2}{c^2}} \tag{10}$$

ma  $t'$  è anche il tempo che impiega l'orologio di Beta a compiere un rimbalzo, riferito all'orologio di Alfa. La (10) significa dunque che i due orologi, che sulla Terra risultavano sincronizzati, quando Beta è in moto uniforme risultano sfasati, cioè il tempo per Beta scorre più lentamente che per Alfa, fermo sulla Terra.

Supponiamo che Beta viaggi ad una velocità  $v = \frac{9}{10}c$ . Vediamo quanto tempo passa per Alfa quando all'orologio di Beta è trascorso un secondo.

$$t' = 1s \sqrt{1 + \frac{\frac{81}{100}c^2}{c^2}} = 1s \sqrt{1.81} = 1.35s$$

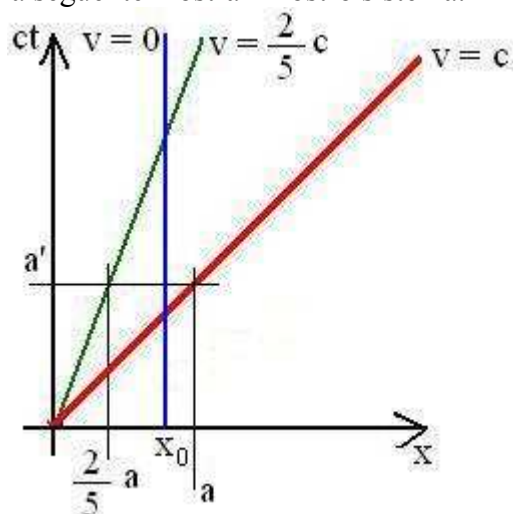
Così mentre per Beta apparentemente non è successo niente, in realtà risulta che il suo orologio scorre più lentamente di quello di Alfa.

Concludiamo dicendo che la simultaneità non viene mantenuta nel caso in cui Beta si mette in viaggio a velocità costante ed in moto rettilineo. L'esperienza mostra che la simultaneità non si mantiene nemmeno per moti non rettilinei (si veda il caso dei mesoni deviati in un sincrotrone).

## Lo spazio-tempo

Abbiamo visto come le equazioni di trasformazione dello spazio e del tempo da un sistema fisso ad uno in moto rettilineo uniforme che sono state espone in precedenza, presentano al loro interno una sorta di “mescolanza” di spazi e tempi. Ciò significa che in un certo senso lo spazio non può essere considerato come cosa a sé rispetto al tempo. In una certa misura possiamo affermare che lo spazio può essere considerato un tempo e viceversa, cioè lo spazio ha una componente temporale ed il tempo ha una componente spaziale. Vediamo come possiamo meglio schiarire le idee considerando una situazione molto semplice da gestire.

Consideriamo un moto unidimensionale, per esempio lungo l’asse positivo delle  $x$ . A questo punto non ci resta che “costruire” un sistema di coordinate ortogonali che contenga un asse spaziale  $x$  e un asse spazio-temporale che indichiamo con  $ct$ , dove  $c$  è la velocità della luce ( $c \approx 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ ) e  $t$  è la variabile temporale. La figura seguente mostra il nostro sistema.



Per prima cosa cerchiamo di capire il senso dell’asse spazio-temporale  $ct$ . In questo particolare sistema lo spazio ha una corrispondenza temporale nel senso che in esso 1 metro corrisponde al tempo che impiega la luce a percorrere tale distanza, cioè circa  $0.33 \times 10^{-8}$  secondi; in modo analogo 1 secondo corrisponde alla distanza percorsa dalla luce in questo tempo, cioè circa  $3 \times 10^8$  metri. Questa è la corrispondenza spazio-temporale che utilizzeremo per l’asse  $ct$ . Nella figura sono mostrate tre situazioni diverse. In questo particolare sistema un corpo fermo nella posizione  $x_0$  è rappresentato da una retta parallela all’asse spazio-temporale (linea blu). La linea verde, invece, rappresenta il moto di un corpo che parte dall’origine ad una velocità  $v = \frac{2}{5}c$ . Mentre la linea rossa

rappresenta il caso limite di un corpo che, partendo dall’origine, viaggia alla velocità della luce  $c$ .

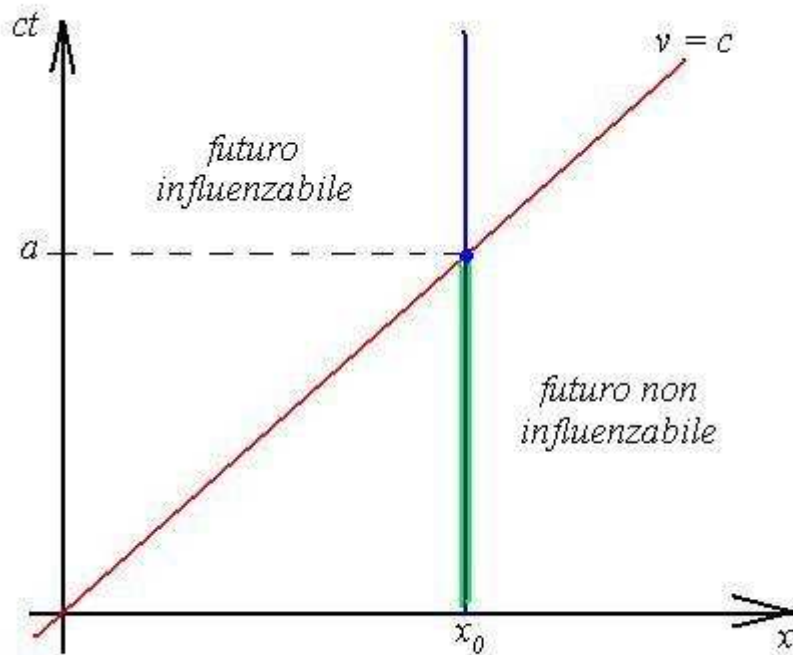
Supponiamo che  $a$  sia lo spazio percorso dalla luce dopo un certo tempo  $t'$  e consideriamo un corpo che viaggia, partendo dall’origine, ad una velocità  $v = \frac{2}{5}c$  (linea verde). Vediamo come interpretare

il valore di  $a'$  sull’asse spazio-temporale riferendoci al moto del corpo descritto dalla linea verde.

Considerando  $a'$  come spazio, lo interpretiamo come quello percorso dalla luce nello stesso tempo in cui il corpo che si muove a velocità  $v = \frac{2}{5}c$  percorre la distanza  $\frac{2}{5}a$ . Considerandolo come

tempo, invece, esso è quello che impiegherebbe la luce per percorrere la distanza  $\frac{2}{5}a$ .

Consideriamo ora la figura seguente.



La figura mostra come un evento che avviene ad una certa distanza dall'osservatore (posto nell'origine degli assi) viene osservato solo dopo un certo tempo. Interpretiamo il valore  $a$  sull'asse spazio-temporale come il tempo impiegato dalla luce per percorrere la distanza  $x_0$ , cioè la distanza a cui si trova l'evento. L'osservatore posto nell'origine al tempo  $t = 0$  non avrà alcuna informazione sull'evento per tutto il tempo  $t \leq a$  (questo tempo è stato segnalato in figura da un doppio tratto di colore verde). Ma per tutto questo tempo l'evento comunque è esistito, solo che si trovava in una zona del piano spazio-tempo detta *futuro non influenzabile*, proprio perché non può in alcun modo essere influenzata dalla nostra osservazione che ovviamente non può esserci. L'evento entra nella zona detta del *futuro influenzabile* quando il tempo  $t$  è maggiore di  $a$ , cioè dopo che la luce ha raggiunto l'evento e che quindi risulta osservabile dall'osservatore.

Un esempio ci viene offerto dal Sole. È risaputo che la luce impiega circa otto minuti per giungere dal Sole fino a noi. Ogni evento che accade nel sole può essere osservato dalla Terra con un "ritardo" di circa otto minuti. Questo significa che noi non abbiamo in alcun modo la possibilità di osservare istantaneamente il fenomeno, perché la luce ha una sua velocità finita e non superabile. Supponiamo che ad un certo istante avvenga un'esplosione nella corona solare. Per circa otto minuti l'evento si troverà nella zona del futuro non influenzabile, mentre il tempo passa.