

Appunti di teoria delle funzioni

In questa dispensa parleremo delle funzioni reali di variabile reale, descrivendo alcune proprietà fondamentali e introducendo definizioni basilari.

Siano A e B due sottoinsiemi di R .

Definizione: Una qualsiasi legge matematica che trasforma ogni elemento dell'insieme A in uno ed un solo elemento dell'insieme B si definisce **funzione**. Il sottoinsieme A è spesso chiamato **insieme di partenza** di f , mentre il sottoinsieme B è detto **insieme di arrivo** di f .

Una funzione così definita in simboli matematici si esprime come segue:

$$f: A \rightarrow B.$$

Definizione: Se la funzione f accetta (quindi trasforma) tutti gli elementi dell'insieme A , allora tale insieme prende il nome di **dominio** della funzione f .

Definizione: L'insieme di tutti gli elementi dell'insieme B che sono associabili all'insieme A per via dell'azione di f prende il nome di **codominio** o **immagine** di f .

In termini insiemistici il codominio è rappresentato come segue:

$$Cod(f) = \{y \in B \mid \exists x \in A \text{ t. c. } y = f(x)\}.$$

Definizione: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **iniettiva** se:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 \neq x_2 : f(x_1) \neq f(x_2).$$

Dalla definizione appena data segue che la funzione $f(x) = x^2 + 1$ non può essere iniettiva, mentre lo sarà sicuramente la funzione $f(x) = x^3 - 5$.

Definizione: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **suriettiva** (o **surgettiva**) se l'insieme d'arrivo B coincide col codominio di f . In termini matematici f è suriettiva se:

$$\forall y \in B \exists x \in A \mid y = f(x).$$

La funzione $f(x) = x^3$ è sia iniettiva che suriettiva su tutto R . La funzione $f(x) = x^2$ non è iniettiva e neanche suriettiva su tutto R . Risulta invece suriettiva su R^+ (restrizione dell'insieme di arrivo ai soli reali positivi).

Definizione: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **biunivoca** se è al contempo sia iniettiva che suriettiva.

Definizione: Si definisce **grafico** della funzione $f: A \rightarrow B$ l'insieme delle coppie del piano reale del tipo $(x, f(x))$. In termini insiemistici:

$$graf = \{(x, f(x)) \mid x \in A, f(x) \in B\}.$$

Osservazione: Il grafico di una funzione $f: A \rightarrow B$ è un sottoinsieme del prodotto cartesiano $A \times B$.

Estremi di una funzione

Sia $f: D \rightarrow R$ una funzione definita sul suo dominio D e avente valori nell'insieme dei numeri reali R .

Definizione: Si dice che f ha un **massimo assoluto** nel punto $x_0 \in D$ se:

$$\forall x \in D: f(x) \leq f(x_0).$$

Definizione: Si dice che f ha un **minimo assoluto** nel punto $x_0 \in D$ se:

$$\forall x \in D: f(x) \geq f(x_0).$$

Definizione: Si dice che f ha un **massimo relativo** in un intorno I_{x_0} del punto $x_0 \in D$ se:

$$\forall x \in I_{x_0}: f(x) \leq f(x_0).$$

Definizione: Si dice che f ha un **minimo relativo** in un intorno I_{x_0} del punto $x_0 \in D$ se:

$$\forall x \in I_{x_0}: f(x) \geq f(x_0).$$

Definizione: Una funzione $f: D \rightarrow R$ si dice **costante** se in ogni punto del dominio f ha al contempo un massimo assoluto e un minimo assoluto.

Definizione: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **limitata** se la sua immagine (cioè il suo codominio) è costituita da un intervallo limitato.

Definizione: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **limitata superiormente** se la sua immagine è costituita da un intervallo limitato superiormente.

Definizione: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **limitata inferiormente** se la sua immagine è costituita da un intervallo limitato inferiormente.

Definizione: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **illimitata** se la sua immagine è costituita da un intervallo illimitato.

Esempi:

La funzione $f(x) = \sin(x)$ è una funzione limitata in quanto nel piano reale essa può assumere solo valori nell'intervallo chiuso e limitato $[-1, 1]$.

La funzione $f(x) = \sqrt{x}$ è una funzione limitata inferiormente in quanto essa assume qualsiasi valore nell'intervallo limitato inferiormente $[0, +\infty)$.

Caratteristiche di alcune funzioni

Definizione: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **periodica** o **t-periodica** di periodo $t (> 0)$ se il suo dominio è invariante per traslazioni di passo t e risulta:

$$f(x + t) = f(x), \forall x \in A.$$

Il più piccolo t che soddisfa le condizioni di cui sopra viene detto **periodo** di f .

Esempi di funzioni periodiche sono il seno ($t = 2\pi$), il coseno ($t = 2\pi$), la tangente ($t = \pi$) e tante altre funzioni definite circolari.

Definizione: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **pari** o simmetrica rispetto all'asse delle ordinate, se $f(x) = f(-x), \forall x \in A$.

Esempio: La funzione $f(x) = x^2 - 1$ è una funzione pari.

Definizione: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **dispari** o simmetrica rispetto all'origine degli assi, se $f(x) = -f(-x), \forall x \in A$.

Esempio: La funzione $f(x) = x^3$ è una funzione dispari.

Composizione di funzioni

Siano $g: A \rightarrow B$ e $f: B \rightarrow C$ due funzioni reali di variabile reale, definite sui rispettivi domini.

Definizione: Una funzione $h: A \rightarrow C$ si dice **composta** di f e g se è tale che $h(x) = f(g(x))$, $\forall x \in A$. In termini funzionali si scrive:

$$h = f \circ g.$$

Esempio: La funzione $h(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ è una funzione composta. Infatti h risulta essere la composizione delle seguenti funzioni:

$$g(x) = x^2 + 1 \text{ e } f(y) = \sqrt{y}.$$

Dall'esempio di cui sopra è facile intuire come due funzioni si possano comporre applicando la seconda funzione all'immagine della prima.

Sia $f: A \rightarrow B$ una funzione biunivoca (eventualmente considerando la restrizione al solo codominio).

Definizione: La funzione $g: B \rightarrow A$ si dice **inversa** della funzione f se:

$$f \circ g = g \circ f = Id,$$

dove con il simbolo Id viene indicata la **funzione identità**, ossia quella funzione che associa ad ogni elemento dell'insieme di partenza sé stesso nell'insieme di arrivo:

$$Id(x) = x, \forall x \in A.$$

Nota: La funzione inversa di una funzione f si indica col simbolo f^{-1} .

Esempio: Sia $f(x) = x^2$ definita sui soli reali non negativi ed avente come insieme di arrivo il solo codominio. La funzione ha come grafico il solo ramo destro della parabola. Con le restrizioni sopra riportate tale funzione risulta essere biunivoca. La sua inversa non può che essere ovviamente la funzione $f^{-1}(y) = \sqrt{y}$. Infatti, componendo queste due funzioni, si ottiene la funzione identità:

$$f^{-1} \circ f(x) = f(f^{-1}(x)) = (\sqrt{x})^2 = x,$$

mentre

$$f \circ f^{-1}(x) = f^{-1}(f(x)) = \sqrt{x^2} = x.$$

Teorema: Condizione necessaria ma non sufficiente affinché $f: A \rightarrow B$ sia invertibile è che f sia iniettiva.

Teorema: Se una funzione $f: A \rightarrow B$ è invertibile allora f risulta biunivoca.

Esempio di come determinare l'inversa di una funzione:

Determinare la funzione inversa di $f(x) = (2x + 8)^3$.

Bisogna trovare un'espressione che esprima la variabile x nel codominio della funzione f .

Si pone $y = (2x + 8)^3$, con y elemento ovviamente del codominio, e si risolve l'equazione in x :

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{y} &= 2x + 8 \\ x &= \frac{\sqrt[3]{y} - 8}{2}. \end{aligned}$$

La funzione $g(y) = \frac{\sqrt[3]{y} - 8}{2} = f^{-1}(y)$ è la funzione inversa della funzione f .

Osservazione: Una funzione f può risultare invertibile localmente in un sottoinsieme di A nel quale f risulti iniettiva, pur non essendolo su tutto A .

Funzioni monotòne

Definizione: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **strettamente crescente** se:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2: f(x_1) < f(x_2).$$

Definizione: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **strettamente decrescente** se:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2: f(x_1) > f(x_2).$$

Teorema: Se una funzione $f: A \rightarrow B$ è strettamente crescente oppure strettamente decrescente allora essa è anche invertibile.

Definizione: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **non decrescente** se:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2: f(x_1) \leq f(x_2).$$

Definizione: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **non crescente** se:

$$\forall x_1, x_2 \in A, x_1 < x_2: f(x_1) \geq f(x_2).$$

Definizione: Una funzione $f: A \rightarrow B$ si dice **costante** se è al contempo non decrescente e non crescente.

Nota: Tutte le definizioni di monotonia date sopra si possono restringere anche localmente se le proprietà valgono in un qualsiasi intorno di un punto del dominio.