

Grandezze vettoriali

In fisica esistono generalmente due categorie di grandezze. Alcune di queste sono caratterizzate dal fatto che possono essere identificate assegnando loro un valore numerico con la rispettiva unità di misura. Esempi di queste grandezze sono la massa o il tempo. La massa di un corpo è definita come caratteristica intrinseca del corpo stesso, cioè essa non varia a seguito di spostamenti. Se un corpo ha una massa di 5 kg, essa continuerà a essere tale, anche se il corpo si muove verso destra, o verso sinistra, ecc.

La durata di un intervallo temporale, quale può essere il secondo, almeno per quelle che sono le nostre percezioni terrene, non dipende da movimenti o altro. Il tempo come la massa possono essere dunque ben identificate assegnando loro un valore numerico. Queste grandezze prendono il nome di **grandezze scalari**, o semplicemente **scalari**.

Immaginiamo ora di dover chiedere a qualcuno di spostarsi. È molto facile che ci vengano chieste informazioni più dettagliate, tipo “di quanto?” o “verso dove?”, ecc.

È chiaro che alcune grandezze fisiche non possono essere espresse in modo univoco da una sola informazione, così come capitava con gli scalari. È quanto mai necessario fornire maggiori dettagli. Per definire in modo adeguato uno spostamento bisogna innanzitutto identificare in modo chiaro il punto di partenza, la direzione, il verso e la lunghezza dello spostamento.

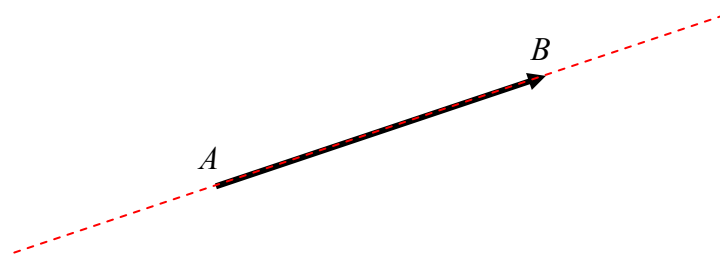
Se una grandezza fisica ha le stesse caratteristiche elencate per gli spostamenti, allora essa sarà chiamata **grandezza vettoriale**, o semplicemente **vettore**.

Come abbiamo già accennato, un vettore gode delle seguenti proprietà:

- **Punto di applicazione** – è il punto del piano (2 dimensioni) o dello spazio (3 o più dimensioni) in cui viene applicato il vettore;
- **Direzione** – è la retta su cui giace il vettore, ossia la retta d'azione;
- **Verso** – è definito come il senso di percorrenza della retta d'azione, partendo dal punto di applicazione;
- **Intensità o modulo** – è la lunghezza del segmento che rappresenta il vettore. Rappresenta la parte scalare del vettore.

Due vettori sono uguali se hanno tutte e quattro le proprietà uguali. Due vettori aventi stesso verso, stesso modulo e direzione parallela (ossia la stessa) si dicono **equipollenti** e possono essere trascinati lungo il piano in modo poter variare il punto di applicazione, mantenendo inalterate le altre proprietà.

Un vettore è rappresentato graficamente con una freccia, come mostrato in figura:



Il punto A rappresenta il punto di applicazione del vettore. La direzione è rappresentata dalla retta tratteggiata in rosso. Il verso è indicato dalla punta della freccia, mentre il modulo è dato dalla lunghezza del segmento \overline{AB} . Il vettore in figura può essere indicato in modo simbolico con \overrightarrow{AB} .

Altri modi di indicare simbolicamente un vettore possono essere i seguenti:

il vettore \vec{v} di modulo v , oppure il vettore \vec{F} di modulo F .

Somma di due vettori

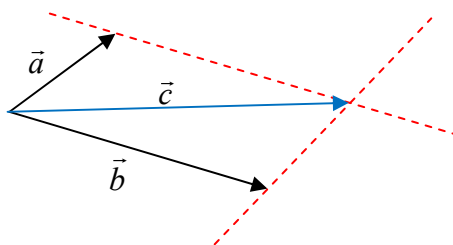
Le grandezze vettoriali hanno una propria "aritmetica" che in generale non corrisponde a quella che noi siamo abituati a considerare. Per chiarire meglio quest'aspetto possiamo immaginare di avere due vettori \vec{a} e \vec{b} , tali che abbiano modulo $a = 3$ e $b = 4$. Siamo portati a pensare che se $a + b = 7$, per cui sommando i due vettori \vec{a} e \vec{b} ci aspettiamo un vettore $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$, con modulo $c = 7$.

Purtroppo in generale le cose non vanno proprio così.

Iniziamo col dire che la somma di due vettori è ancora un vettore e che siamo in grado di sommare solo due vettori alla volta.

Consideriamo due vettori \vec{a} e \vec{b} che abbiano lo stesso punto di applicazione (in caso contrario uno dei due può essere trascinato per la proprietà di equipollenza) e direzioni diverse.

Il vettore somma \vec{c} è determinato graficamente dalla regola del parallelogramma, la cui costruzione è mostrata in figura.



È evidente che il modulo di \vec{c} non può essere la somma algebrica dei moduli di \vec{a} e \vec{b} : la diagonale di un parallelogramma non è uguale alla somma dei lati. Se si sommano due vettori formanti un angolo retto, la cosa è ancora più evidente, poiché potremmo dimostrare in modo più convincente l'asserto attraverso il teorema di Pitagora.

Non ha senso parlare di differenza di due vettori poiché quest'operazione non è definita. Risolvere l'operazione vettoriale $\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$ significa sommare al vettore \vec{a} l'opposto del vettore \vec{b} , ossia il vettore $-\vec{b}$ (che è un vettore che ha le stesse proprietà del vettore \vec{b} , ma verso opposto).

Può benissimo capitare che il modulo della somma di due vettori coincida con il modulo della "differenza" degli stessi, ma cambieranno sicuramente le direzioni.

La somma di due vettori segue le usuali regole algebriche nell'unico caso in cui essi dovessero operare sulla stessa retta d'azione, ma è giusto rilevare che in generale non sarà così.

Prodotto di uno scalare per un vettore

Esiste un prodotto misto tra grandezze scalari e grandezze vettoriali. Il risultato di tale operazione è ancora un vettore.

Sia k uno scalare e \vec{v} un vettore. Abbiamo $\vec{w} = k\vec{v}$.

Il vettore \vec{w} avrà le seguenti proprietà:

- avrà lo stesso punto di applicazione del vettore \vec{v} ;
- avrà la stessa direzione del vettore \vec{v} ;
- avrà lo stesso verso di \vec{v} se $k > 0$, oppure verso opposto se $k < 0$;
- avrà come modulo $w = |k| \cdot v$.

in modo del tutto analogo un vettore può essere diviso per uno scalare e le proprietà del vettore risultante sono le stesse espresse per il prodotto.

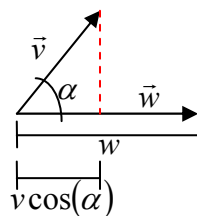
Prodotto scalare

Esiste un prodotto tra due vettori che ha come risultato non un vettore ma uno scalare. Questo particolare prodotto prende il nome di **prodotto scalare**. Esso è definito nel modo seguente.

Siano \vec{v} e \vec{w} due vettori, aventi lo stesso punto di applicazione e tali che le due direzioni formino un angolo α .

$$\vec{v} \cdot \vec{w} = vw \cos(\alpha)$$

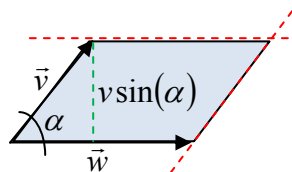
Il prodotto scalare di due vettori è uno scalare pari al prodotto dei moduli dei due vettori moltiplicato per il coseno dell'angolo fra essi compreso. Esso può essere visto e interpretato anche come il prodotto tra il modulo di uno dei due vettori e la lunghezza della proiezione dell'altro vettore lungo la direzione del primo.



Prodotto vettoriale

Due vettori qualsiasi possono essere moltiplicati in modo che ne risulti ancora un vettore. Questo tipo di prodotto si chiama **prodotto vettoriale**.

Siano \vec{v} e \vec{w} due vettori, aventi lo stesso punto di applicazione e tali che le due direzioni formino un angolo α .



Il vettore $\vec{z} = \vec{v} \times \vec{w}$ è un vettore che ha lo stesso punto di applicazione dei due vettori fattori ma direzione perpendicolare al piano formato da \vec{v} e \vec{w} .

Il verso del vettore \vec{z} è stabilito facendo ruotare il primo vettore, ossia \vec{v} , sopra il secondo \vec{w} in modo che l'angolo di rotazione sia il minore dei due possibili. Il verso è dato quindi dal senso di avvitalamento/svitamento di una vite destrorsa. Ne risulta che il prodotto vettoriale non è commutativo, ossia $\vec{v} \times \vec{w} = -(\vec{w} \times \vec{v})$.

Altri modi per stabilire il verso sono la "regola della mano destra" o, in casi particolari il "metodo del cavatappi" di Maxwell.

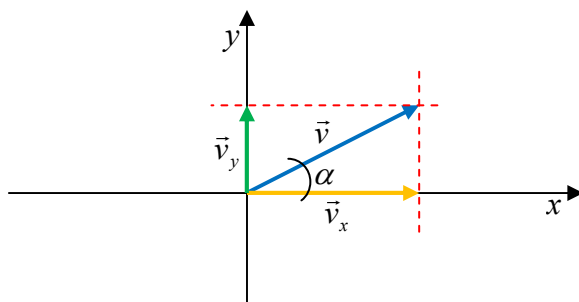
Il modulo del vettore \vec{z} è tale che $z = v \cdot w \cdot \sin(\alpha)$, ossia è pari all'area del parallelogramma generato dai vettori \vec{v} e \vec{w} , come mostrato nella figura precedente.

Scomposizione di un vettore in due componenti ortogonali

In questo paragrafo ci poniamo un problema che possiamo definire opposto della somma vettoriale. Dato un vettore qualsiasi del piano \vec{v} , ci chiediamo se riusciamo a trovare due altri vettori \vec{v}_x e \vec{v}_y tali che la loro somma vettoriale sia proprio \vec{v} , cioè che possa essere $\vec{v} = \vec{v}_x + \vec{v}_y$.

Procediamo in questo modo. Dato il vettore \vec{v} , costruiamo un sistema di riferimento cartesiano che abbia origine nel punto di applicazione di \vec{v} .

I nostri vettori cercati \vec{v}_x e \vec{v}_y non sono altro che le due proiezioni ortogonali di \vec{v} rispettivamente lungo l'asse x e lungo l'asse y, come mostrato in figura.



In giallo e verde sono rappresentati i due vettori che componenti ortogonali di \vec{v} .

I moduli delle componenti \vec{v}_x e \vec{v}_y di \vec{v} possono essere ricavati in funzione dell'angolo α che \vec{v} forma con l'asse x. Possiamo scrivere la seguente coppia di formule:

$$\begin{cases} v_x = v \cdot \cos(\alpha) \\ v_y = v \cdot \sin(\alpha) \end{cases}$$

Dalla trigonometria sappiamo che l'angolo α può essere determinato conoscendo i moduli delle componenti ortogonali di \vec{v} . Infatti, risulta

$$\tan(\alpha) = \frac{v_y}{v_x},$$

quindi

$$\alpha = \arctan\left(\frac{v_y}{v_x}\right).$$