

1. Processi stocastici stazionari e non stazionari dall'analisi del prezzo del petrolio

Quello che vogliamo fare in questo articolo è un'analisi statistica che vede come oggetto d'indagine la serie temporale di ventuno anni di quotazione giornaliera del prezzo del petrolio (dollari per barile) alla NYSE, dal 1986 al 2007. La serie temporale è composta da un database temporale di 5301 dati. Indichiamo questa serie con

$$\{X(t), t \in T\} \quad (1.1)$$

dove $T = \{1, \dots, 5301\}$ rappresenta l'insieme temporale della serie finanziaria.

Partendo dalla (1.1), che indicheremo più semplicemente con $X(t)$, costruiamo due nuove serie temporali che chiamiamo rispettivamente NR (*Normalized Returns*) e NANR (*Normalized Absolute N>Returns*), che definiamo in questo modo

$$NR(t) \equiv R(t) - \langle R(t) \rangle \quad (1.2)$$

dove

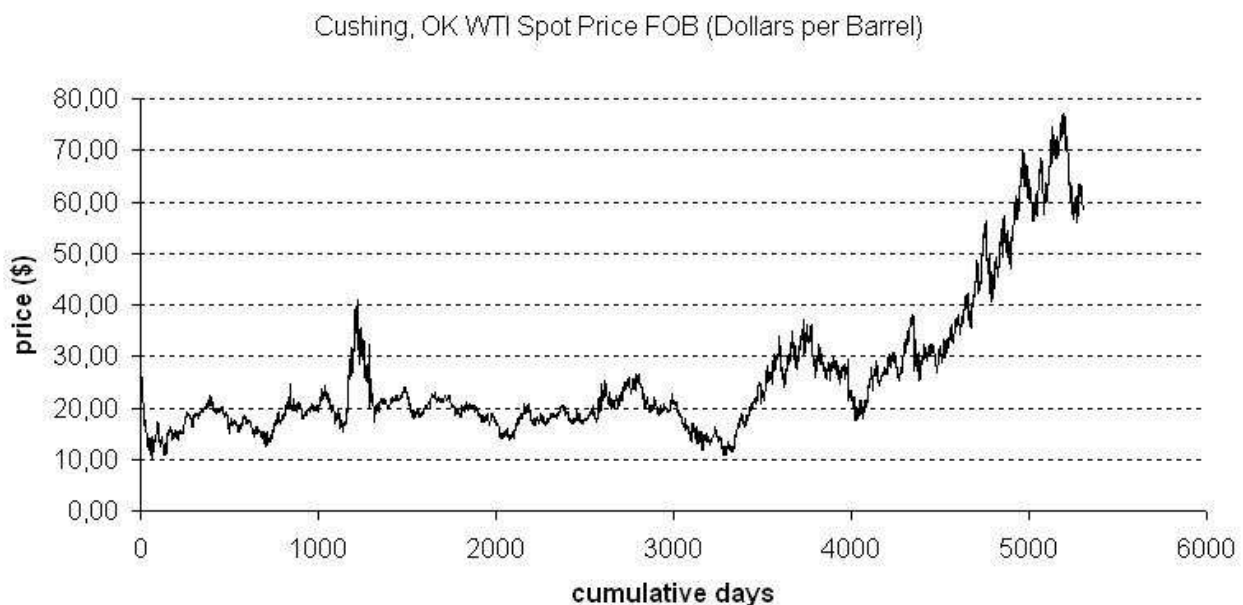
$$R(t) \equiv \log \frac{X(t+1)}{X(t)}$$

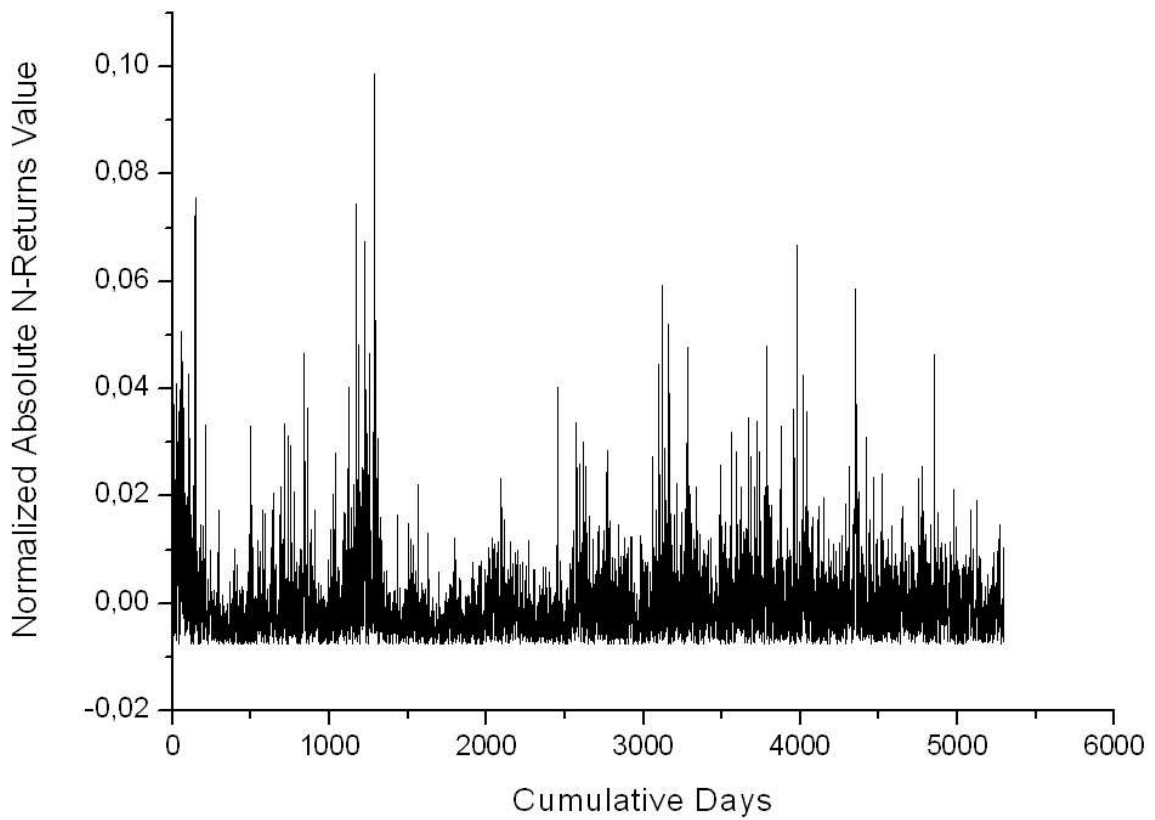
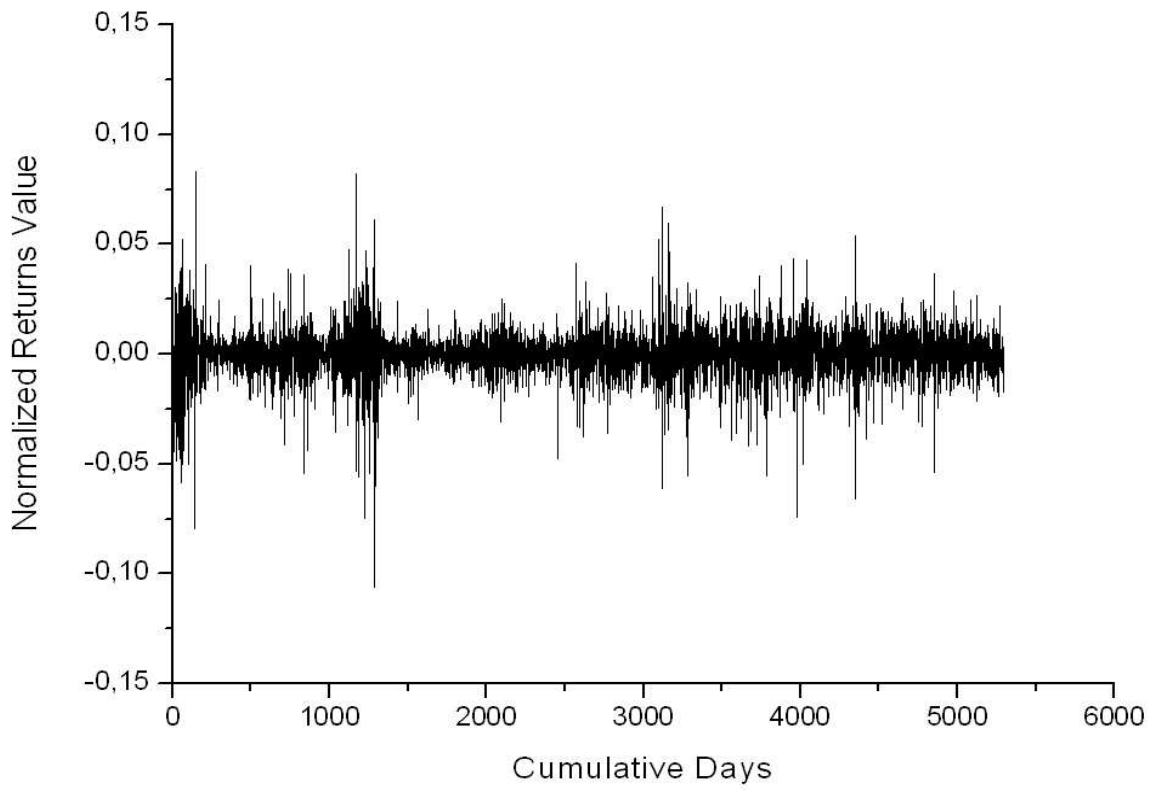
è una serie temporale che chiamiamo *ritorno* del prezzo.
Invece, per quanto riguarda la variabile aleatoria NANR

$$NANR(t) \equiv |NR(t)| - \langle NR(t) \rangle. \quad (1.3)$$

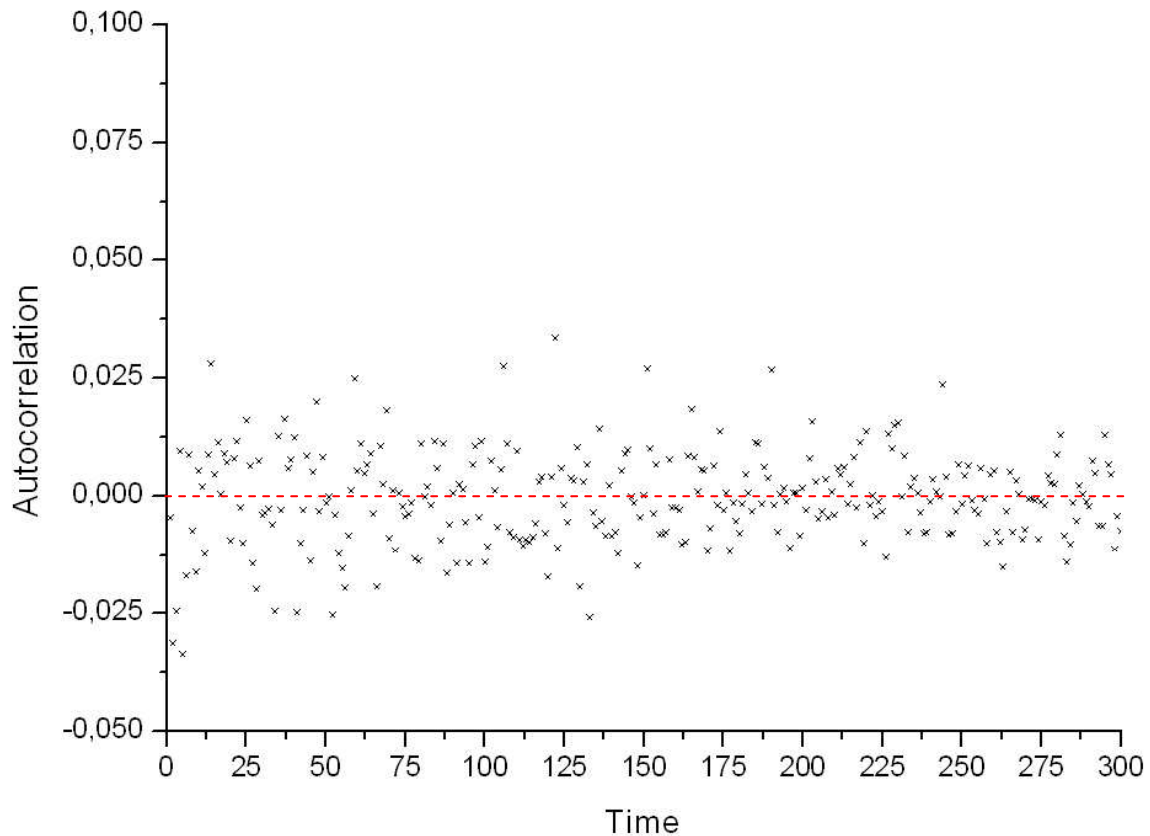
La serie temporale (1.2) rappresenta un processo stocastico stazionario, mentre la (1.3) un processo stocastico non stazionario (ne omettiamo la dimostrazione sia perché presente in molta letteratura, ma soprattutto perché esula dai nostri scopi).

Nelle tre figure ce seguiranno mostreremo in ordine le fluttuazioni stocastiche temporali delle tre variabili aleatorie $X(t)$, $NR(t)$ e $NANR(t)$.





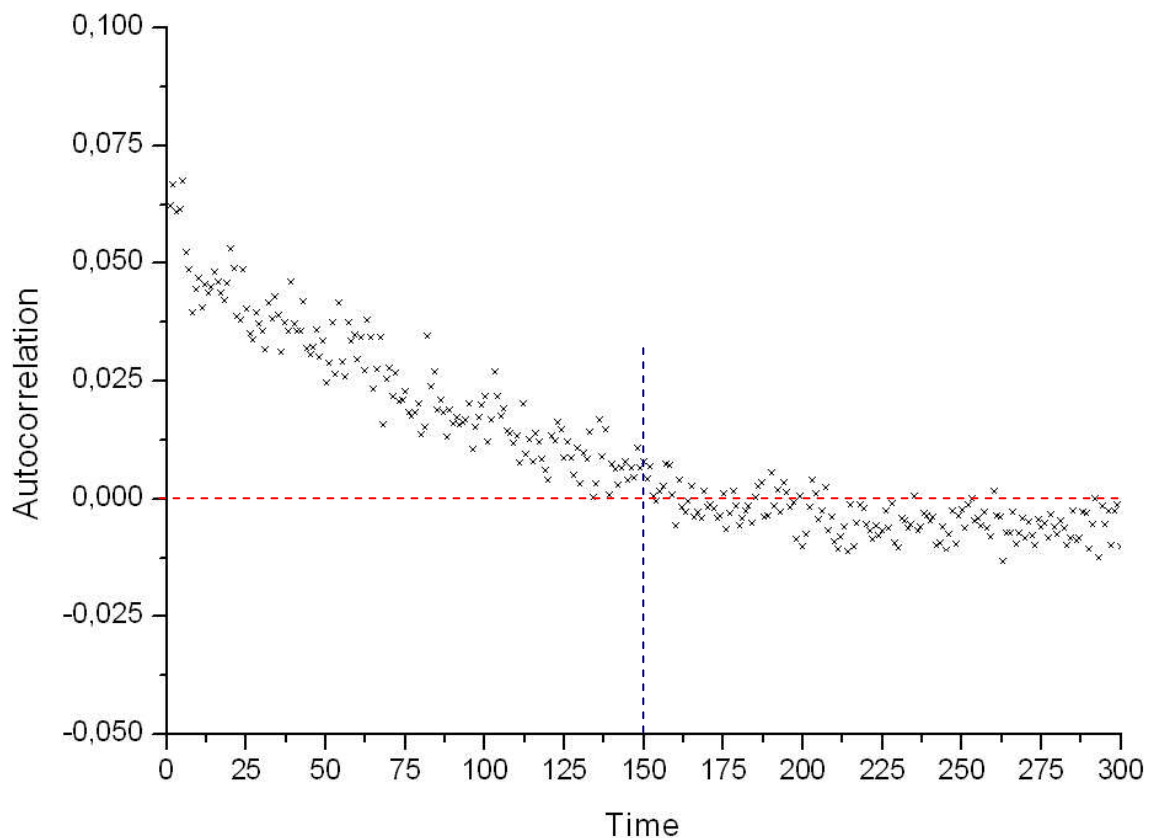
Come abbiamo detto in precedenza $NR(t)$ è un processo stocastico stazionario, ossia una serie temporale con media nulla e i cui incrementi sono distribuiti uniformemente secondo una distribuzione gaussiana. Per la stazionarietà del processo, gli incrementi sono indipendenti e non presentano effetti di memoria. Ciò è semplicemente dimostrato dall'analisi della funzione di autocorrelazione, il cui grafico è il seguente



Risulta ben visibile che la funzione di autocorrelazione decade istantaneamente sullo zero, senza mostrare alcun effetto di memoria apprezzabile. Persino la stima dell'esponente di Hurst per la serie temporale $NR(t)$, operata col metodo DFA (*De-trended Fluctuations Analysis*), mostra un valore $H = 0.54 \pm 0.03$, ossia che il processo stocastico stazionario $NR(t)$ è assimilabile ad un moto browniano classico.

Invece, per quanto riguarda la serie temporale $NANR(t)$ abbiamo detto che essa rappresenta un processo stocastico non stazionario. La media di questo processo è comunque nulla e gli incrementi sono distribuiti secondo una legge di distribuzione normale gaussiana, anche se spesso capita di avere code che seguono una legge di potenza (range di Lévy).

La non stazionarietà di questo processo rende gli incrementi dipendenti dalla storia precedente del processo stesso. Questo risultato è ben visibile dal grafico della funzione di autocorrelazione per la serie temporale $NANR(t)$, che mostriamo nella figura seguente



Il grafico della funzione di autocorrelazione mostra chiaramente che gli incrementi successivi dipendono temporalmente da quelli precedenti e questo effetto di memoria resta per un tempo medio stimabile intorno ai 150 giorni. Questo è un risultato veramente notevole perché dimostra come un qualsiasi evento che ha generato una fluttuazione del prezzo “estrema” si fa sentire sul resto delle quotazioni per un periodo di circa 5 mesi.

Già possiamo affermare che la variabile aleatoria $NANR(t)$ descrive bene l’inefficienza del mercato, che denota la non stazionarietà di tutto il processo. In finanza a questa variabile viene dato il nome di *volatilità* e indica la misura del rischio associato all’investimento in un certo prodotto finanziario, nel nostro caso il petrolio.

Il comportamento della funzione di autocorrelazione della serie temporale $NANR(t)$ è coerente con la stima dell’esponente di Hurst operata con la DFA. Otteniamo $H = 0.82 \pm 0.02$, che denota una forte persistenza.

La coerenza esistente tra la stima dell’esponente di Hurst, operata con la DFA, ed il comportamento della funzione di autocorrelazione ci portano ad affermare che il processo stocastico $NANR(t)$, proprio per la sua non stazionarietà, sia assimilabile ad un moto browniano frazionario unidimensionale.

2. Prove di simulazione del prezzo del petrolio

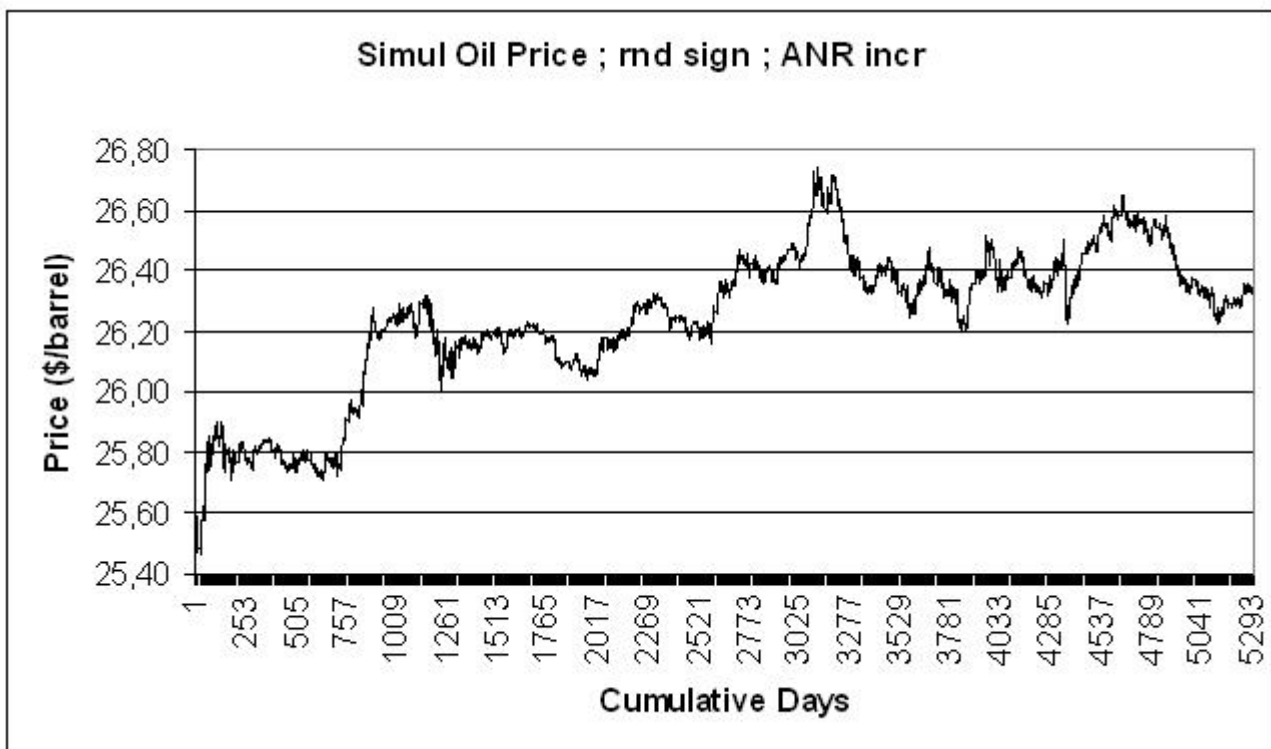
Vogliamo generare delle serie temporali che simulino l'andamento del prezzo del petrolio considerando i processi $NR(t)$ e $NANR(t)$ descritti nel paragrafo precedente.

Iniziamo dal processo $NR(t)$. La prima simulazione rappresenta le fluttuazioni di una serie temporale $X_1(t)$ costruita ricorsivamente in questo modo

$$\begin{aligned} X_1(1) &= 25.56 \\ X_1(t) &= X_1(t-1) \pm |NR(t)| \end{aligned} \quad (2.1)$$

dove 25.56\$ è il prezzo del petrolio all'istante iniziale ed il segno \pm è preso da una sequenza casuale di numeri compresi tra -1 e 1 , distribuiti con media nulla.

Nella figura che segue mostriamo la simulazione in base alla (2.1)



Si vede che la simulazione ottenuta non rispecchia l'andamento reale. Infatti il prezzo oscilla tra un minimo di poco superiore ai 25.40\$ ed un massimo di poco inferiore ai 26.80\$. L'andamento simulato è quello che si otterrebbe in caso di perfetta efficienza del mercato, cosa che è risaputa essere impossibile.

Considerando sempre la serie temporale $NR(t)$, costruiamo un nuovo processo $X_2(t)$, diverso dal precedente, in questo modo

$$X_2(1) = 25.56$$

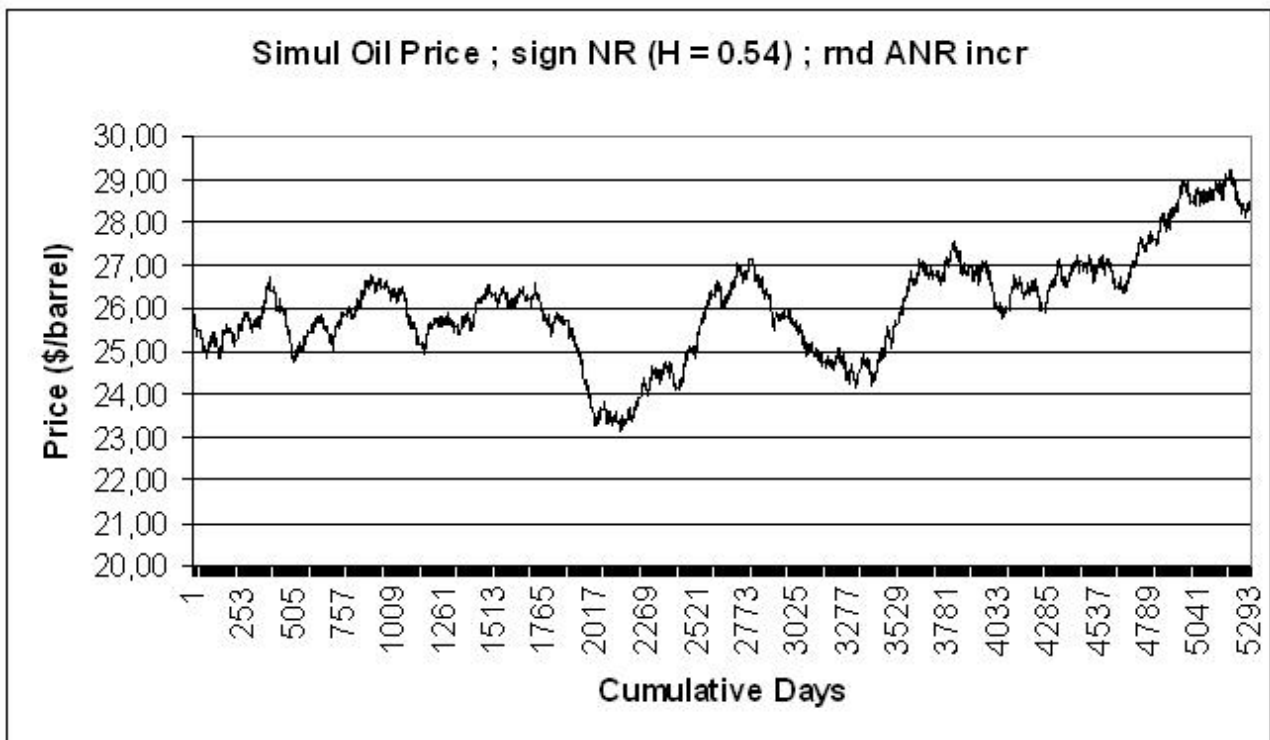
$$X_2(t) = X_2(t-1) \pm |\phi(t)| \quad (2.2)$$

dove 25.56\$ è il prezzo del petrolio all'istante iniziale, il segno \pm è quello della serie temporale $NR(t)$ ($H = 0.54 \pm 0.03$) e la serie temporale $\phi(t)$ è una sequenza di numeri casuali con media zero ed estremi a e b , tali che

$$a = \min\{NR(t)\}$$

$$b = \max\{NR(t)\}$$

Nella figura seguente mostriamo le fluttuazioni temporali della (2.2)



Questa simulazione è sicuramente più attendibile della precedente, ma non lo è rispetto alla situazione reale. Anche in questo caso le oscillazioni del prezzo del petrolio vanno da un minimo di poco superiore ai 23\$ al barile a poco più di 29\$ al barile.

Queste due simulazioni mostrano ancora una volta come il processo $NR(t)$ sia assimilabile ad un moto browniano classico. Cosa possiamo dire invece per quanto riguarda la maggiore variazione totale del prezzo di quest'ultima simulazione rispetto alla precedente? Nella prima simulazione il segno \pm veniva da una sequenza di numeri casuali con media nulla ed avente $H = 0.50$, cioè con incrementi perfettamente scorrelati. Il valore dell'esponente di Hurst, $H = 0.54$, della sequenza da cui deriva il segno \pm della seconda simulazione provoca una seppur minima persistenza che genera una leggera dilatazione del range di quotazione.

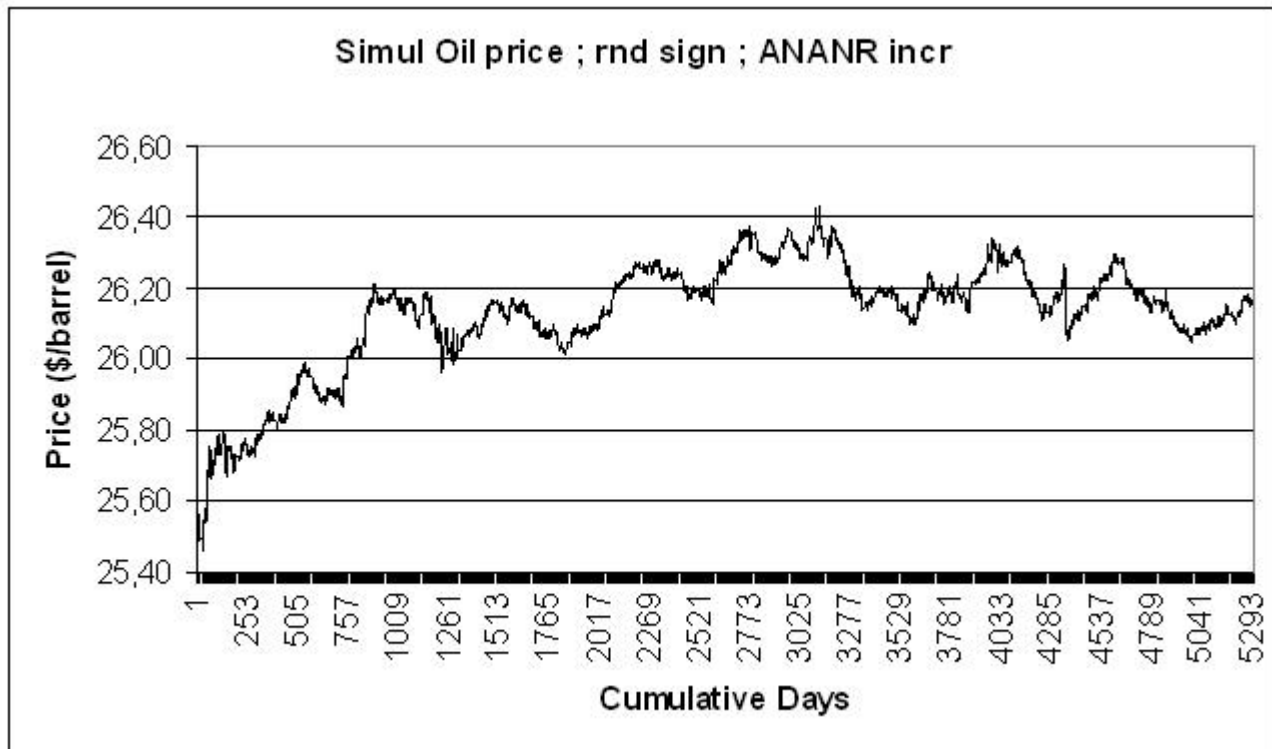
Ora consideriamo la serie temporale $NANR(t)$ e costruiamo una prima serie temporale $X_3(t)$ come segue

$$X_3(1) = 25.56$$

$$X_3(t) = X_3(t-1) \pm |NANR(t)| \quad (2.3)$$

dove 25.56\$ è il prezzo del petrolio all'istante iniziale ed il segno \pm è preso da una sequenza casuale di numeri compresi tra -1 e 1 , distribuiti con media nulla.

Nella figura che segue mostriamo la simulazione in base alla (2.3)



Quello che vediamo dalla figura ha del sorprendente. Pur avendo usato gli incrementi della serie temporale $NANR(t)$, notiamo che si è persa ogni forma di persistenza. Infatti, dalla DFA fatta sulla serie temporale dei ritorni assoluti normalizzati di $X_3(t)$, abbiamo ottenuto un valore dell'esponente di Hurst $H = 0.54$. La simulazione è assimilabile ad un moto browniano classico monodimensionale che non presenta alcun effetto apprezzabile di memoria. Infatti notiamo che questa simulazione non si discosta molto dalle prime due, denotando situazioni di mercato efficiente. Il prezzo del petrolio infatti oscilla quasi esclusivamente all'interno di un dollaro di variazione, da un minimo di poco superiore ai 25.40\$ ad un massimo di 26.40\$.

Considerando sempre la serie temporale $NANR(t)$, costruiamo un nuovo processo $X_4(t)$, diverso dal precedente, in questo modo

$$X_4(1) = 25.56$$

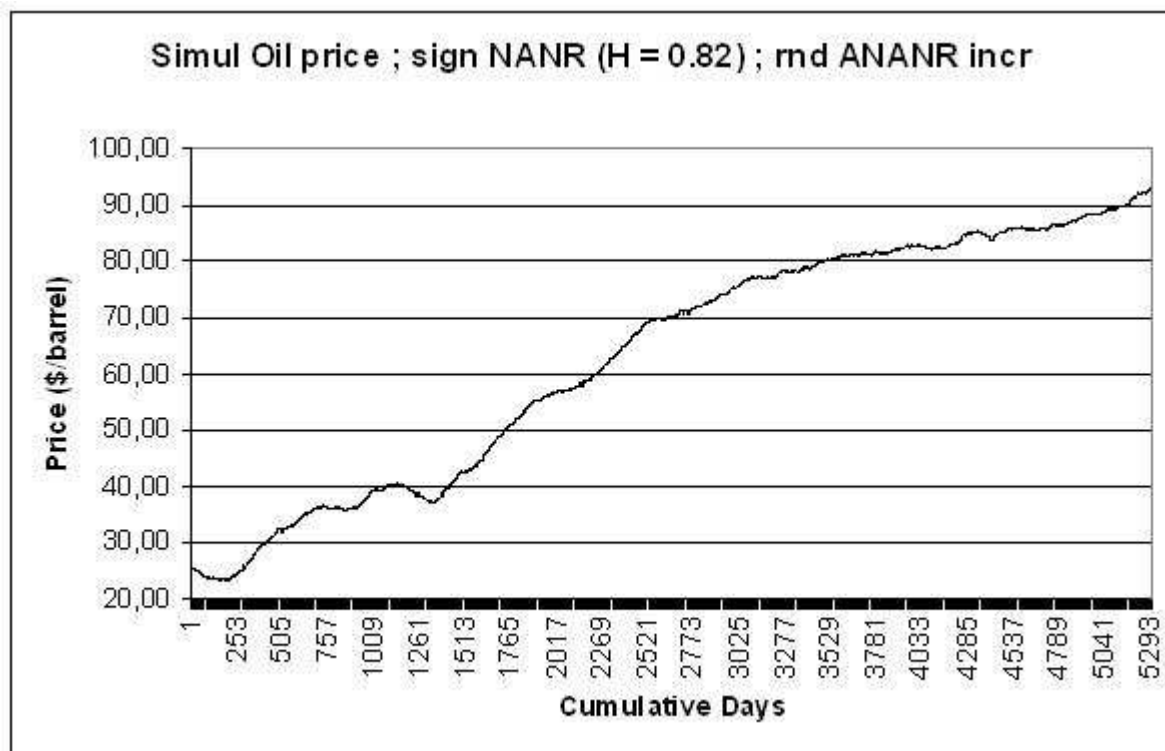
$$X_4(t) = X_4(t-1) \pm |\theta(t)| \quad (2.4)$$

dove 25.56\$ è il prezzo del petrolio all'istante iniziale, il segno \pm è quello della serie temporale $NANR(t)$ ($H = 0.82 \pm 0.02$) e la serie temporale $\theta(t)$ è una sequenza di numeri casuali con media zero ed estremi a e b , tali che

$$a = \min\{NANR(t)\}$$

$$b = \max\{NANR(t)\}$$

Nella figura seguente mostriamo le fluttuazioni temporali della (2.4)



Quest'ultima simulazione è estremamente attendibile ed in accordo con la realtà. Siamo passati da un prezzo in torno ai 25\$ al barile a uno di poco superiore ai 90\$.

Notiamo che, pur essendo gli incrementi distribuiti con media zero ed in modo che siano totalmente indipendenti, l'esponente di Hurst calcolato per la serie dei ritorni assoluti normalizzati di $X_4(t)$ è $H = 0.8$. Risulta che la serie temporale $X_4(t)$ è assimilabile ad un moto browniano frazionario che descrive abbastanza bene quella che è la realtà.

Quest'ultima simulazione, come anche la seconda, mostra come la persistenza o meno del moto non sia tanto legata all'ampiezza della fluttuazione in sé, piuttosto alla permanenza del segno. Infatti in queste due simulazioni gli incrementi sono casuali ($H = 0.5$) e distribuiti a media nulla. Il segno \pm invece deriva dalle rispettive serie temporali $NR(t)$ e $NANR(t)$.