Il metodo DFA come stima dell'esponente di Hurst[♦]

Il metodo DFA (*De-trended Fluctuations Analysis*) viene utilizzato per stimare le *correlazioni frattali* o, se vogliamo, proprio la *dimensione frattale* (D = 2 - H) di un processo stocastico o *random walk*.
Dal punto di vista computazionale è sicuramente il metodo migliore, nonché più immediato e semplice da utilizzare.
Esso è strutturato come segue. Prima di tutto consideriamo un qualsiasi random walk unidimensionale $X(t)$, che dividiamo in un certo numero di sequenze temporali, ognuna di lunghezza n. Per ognuna di queste sequenze generate usiamo una regressione lineare al fine di ottenere un *detrendend walk* interpolato come segue:

$$X'(t) = a + b(t - t_0) .$$

Le n quantità

$$F_D(n) = \left\langle (\delta X)^2 \right\rangle^{\frac{1}{2}}$$

vengono definite *fluttuazioni DFA*, dove

$$\delta X = X(t) - X'(t) .$$

Il rapporto differenziale

$$\alpha(n) = \frac{d \log F_D(n)}{d \log(n+3)}$$

viene definito come *esponente della DFA*.
L'argomento del logaritmo al denominatore, $n + 3$, rappresenta un'importante correzione di scala qualora n fosse molto piccolo; in caso contrario l'argomento sarebbe semplicemente n.
La costanza di $\alpha(n)$, al variare di n, indica che la scala considerata si presenta stabile nel tempo, al contrario la sua non costanza rappresenterebbe una perdita della stabilità di scala. L'esponente della DFA ha senso solo quando la scala temporale si presenta stabile.
In un regime di stabilità, $\alpha(n)$ può assumere valori compresi tra 0 e 1.
Se il random walk esaminato rappresenta un moto browniano frazionario (comprendente anche il moto browniano classico), il coefficiente DFA $\alpha(n)$ coincide con l'esponente di Hurst H (che è legato alla la dimensione frattale del random walk secondo la già citata formula D = 2 - H). Il metodo DFA è quindi un valido metodo alternativo per stimare l'autocorrelazione di u random walk, cioè i cosiddetti *effetti di memoria*.
In generale, per $\alpha(n)$ costante (stabilità di scala), si ha:

- $0 < \alpha(n) < 0.5$ indica che il random walk è antipersistente, cioè presenta un'autocorrelazione negativa;
- $\alpha(n) = 0.5$ indica che il random walk è un moto browniano classico, privo di memoria (*white noise*);
- $0.5 < \alpha(n) < 1$ indica il random walk è un moto browniano frazionario persistente con autocorrelazione positiva ed effetti di memoria di tipo *long range*.

♦ Dr Valerio Curcio – *Un'analisi statistica del mercato azionario: il caso Benetton Group*. Cap IV, pag. 83-84. UNICAL, A.A. 1999/2000