

Tesi di abilitazione in matematica

(A047)

La definizione di limite: un modo per superare le difficoltà di apprendimento

Relatore

Prof. Pietro **CACCIATORE**

Studente

Dr Valerio **CURCIO**

Matr. R05284

Prefazione

Oggi, forse più che in altri tempi, viviamo in una società in continuo mutamento, con una complessità sempre crescente e dove i valori, quelli veri ed autentici, si vanno sempre più smarrendo. I rapporti tra i popoli vanno deteriorandosi e ne sono testimonianza le guerre che infiammano ogni parte del nostro bellissimo pianeta.

Viviamo in un'epoca di grandi contraddizioni, in cui le tecnologie ci offrono grandi capacità di comunicazione proprio mentre si perde la sana abitudine del dialogo.

Cresce sempre più il divario tra nord e sud del mondo, tra ricchi e poveri, tra fortunati e sfortunati.

Le grandi malattie, la povertà, l'indifferenza e la corsa sfrenata verso l'arricchimento, calpestando i diritti fondamentali dell'uomo, fanno della nostra società un rottame che marcisce per la ruggine.

In questo scenario di tristezza e decadenza la scuola deve giocare un ruolo fondamentale di guida, nonché un tentativo di riportare la società odierna ad uno *status quo ante*, progredendo nella modernità, ma arretrando rispetto a ciò che rappresenta il cancro della nostra società: la mancanza di comunicazione e dialogo tra popoli.

La scuola deve favorire l'integrazione ed il dialogo svolgendo quel ruolo di guida e faro che da sempre, nei secoli, essa ha assunto. Il ritorno alla saggezza, parola di cui si è persa ogni memoria, si avrà nel momento in cui sarà possibile avere una scuola ben radicata, efficiente e capace di aprirsi a quelle che sono le vere esigenze della comunità. E all'interno della scuola sono i docenti a svolgere un ruolo fondamentale, quello per cui oggi possiamo definire la docenza una vera e propria vocazione. La comunicazione dei veri valori non può prescindere dai saperi: non può esserci una buona formazione scolastica senza una contestuale acquisizione dei valori fondamentali della vita, e viceversa.

Chiudo questa prefazione facendo una dedica ed un ringraziamento particolare ai miei genitori che mi hanno costantemente aiutato in questo mio percorso di formazione, ma non posso dimenticare i miei due fratelli Efrem e Giampaolo, che anche se lontani più di mille chilometri non hanno mai fatto mancare il loro affetto ed il loro sostegno psicologico. Un altro ringraziamento sento di doverlo fare alla mia ragazza Elena, con la quale ho condiviso questa speciale esperienza di specializzazione per l'insegnamento. In fine, e non per importanza, non posso sottrarmi dal ringraziare il mio relatore, prof Pietro Cacciatore, il quale mi ha "sopportato" con grande serenità ed inconsueta calma.

Introduzione

Sappiamo benissimo come alcuni concetti matematici si presentano particolarmente complicati, soprattutto quando si tratta di insegnarli a studenti delle scuole superiori. Uno di questi concetti è sicuramente quello di *limite* di una funzione.

Le difficoltà sono riscontrabili sia da una parte che dall'altra e non sempre viene prestata particolare cura, da parte del docente, per far fronte a queste difficoltà che spesso, per gli studenti, divengono insormontabili. C'è il serio pericolo che lo studente impari “a memoria” le definizioni, ma senza comprenderne il vero significato, vanificando cioè tutti gli sforzi mnemonici nel momento in cui si trova davanti ad un semplice esercizio in cui viene chiesto di calcolare dei limiti.

Cosa si può fare per evitare che ciò accada? In questo lavoro è mia intenzione cercare di proporre un modo “alternativo” di insegnare questo argomento, facendo riferimento ai numeri iperreali e mettendo in relazione il comportamento nel vicino con quello nell'infinitamente vicino. Daremo quindi una spiegazione dettagliata della classica definizione di limite, quella che chiamerò $\varepsilon\delta$, mostrando quelle che sono le potenzialità di questo approccio, ma anche i limiti. Impareremo quindi a calcolare i limiti per via diretta, ricorrendo, quando è possibile, all'analisi del comportamento della funzione nell'infinitamente vicino, cioè utilizzando i numeri iperreali. Questo metodo alternativo fa parte dell'analisi *non-standard*.

Vedremo come l'utilizzo di questo metodo alternativo potrebbe agevolare la comprensione da parte degli studenti del concetto di limite di una funzione, già a partire dal significato di limite; in particolare cercherò di sfruttare un errato punto di vista, spesso utilizzato dai docenti per rendere l'idea di cosa rappresenti il limite di una funzione.

Spesso il docente di matematica, per rendere la nozione di limite più intuitiva, utilizza un aneddoto del tipo “la funzione tende ad un certo valore (il valore del limite) al tendere della variabile indipendente ad un dato valore”. Dobbiamo subito precisare che questa visione, seppur può essere utile a rendere l'idea, non coglie assolutamente il significato di limite. Possiamo dimostrare quanto detto considerando la seguente funzione:

$$f(x) = (x^2 + 1) \frac{|x|}{x}$$

Quando la variabile indipendente x si avvicina sempre più a 0, anche il valore della funzione si avvicina sempre di più a 0, ma ciò non basta a concludere che il limite di questa funzione per x che tende a 0 è proprio 0! Infatti la funzione non solo si avvicina sempre più a 0, ma anche a qualsiasi valore compreso tra -1 e 1 , ma senza mai assumere valori nell'intervallo $[-1, 1]$ ¹. Quindi, in base

¹ Questo esempio dimostra come la nozione di vicinanza sia molto relativa e questo, di sicuro, non facilita la comprensione di questi argomenti. Ritengo pertanto indispensabile fare riferimento all'infinitamente vicino, più che al vicino.

alla definizione semplicistica che abbiamo espresso in precedenza, non siamo in grado di concludere che questo limite in effetti non esiste. È proprio qui che nascono i primi fraintendimenti degli studenti, che possono portare a sentimenti di sconforto e, successivamente, soprattutto di fronte agli insuccessi, ad un graduale abbandono dello studio della materia. È dunque necessario esprimere il giusto significato del concetto di limite, utilizzando anche nuovi ed alternativi metodi, magari partendo proprio da quelle che sono i preconetti degli studenti. Partiremo quindi dalla caratterizzazione errata di limite vista in precedenza al fine di modificarla per renderla abile a cogliere la vera nozione di limite.

Per fare ciò metteremo in relazione il comportamento delle funzioni nel vicino con quello nell'infinitamente vicino, cioè passeremo dalla definizione classica di limite, utilizzando il campo dei numeri reali, a quella non-standard, utilizzando il campo dei numeri iperreali. Sostituiremo la frase semplicistica *“più mi impegno, meglio faccio”*, spesso presentata dai docenti per aiutare gli studenti a capire meglio la nozione di limite (frase che comunque non coglie la nozione di limite, come già detto) con la frase *“se mi impegno moltissimo faccio benissimo”*, che coglie la nozione di limite e considera il comportamento della funzione nell'infinitamente vicino.

Alla fine di questo lavoro presenteremo il teorema che rende questa interpretazione non-standard, utilizzando gli iperreali, equivalente a quella standard che utilizza gli intorni.

Il nostro lavoro inizierà con una breve parentesi storica dello sviluppo nei secoli dell'analisi infinitesimale. Poi proseguirà con la presentazione della definizione classica di limite, mettendone in luce le difficoltà di apprendimento e i “limiti”, per poi passare ad una breve presentazione del campo dei numeri iperreali con alcune applicazioni non-standard per il calcolo di limiti (in particolare nella risoluzione di forme indeterminate).

Questo lavoro è stato pensato come materiale di supporto per l'insegnamento. Non tutto il contenuto è destinato agli studenti. Ci sono, infatti, delle parti oggettivamente difficili, che non permettono una completa comprensione da parte di alunni di quinto liceo scientifico. Diverse dimostrazioni possono essere omesse, ma è importante che il docente si renda conto delle potenzialità di alcuni “strumenti” matematici; per gli alunni, invece, sono sufficienti gli enunciati dei teoremi e le loro applicazioni “pratiche”.

Un po' di storia

Il calcolo infinitesimale nasce ufficialmente nel XVII secolo d.C. con Newton e Leibniz, per poi svilupparsi in maniera più profonda nel XIX secolo con Weierstrass, fino a giungere alla formulazione dell'analisi non-standard di Robinson, nel XX secolo.

Per calcolare quella che noi oggi chiamiamo la derivata di $y = x^2$, Newton fece il calcolo seguente seguente:

$$(x + o)^2 - x^2 = (x^2 + 2xo + o^2) - x^2 = 2xo + o^2.$$

Dove indicava col simbolo “ o ” un incremento di x veramente molto piccolo (non compare la parola *infinitesimo*).

Per prima cosa scarta il termine o^2 allegando la giustificazione secondo la quale esso rappresenta una potenza di un numero già di per sé molto piccolo, per cui si ottiene un numero ancora più piccolo di quello considerato, quindi non meritevole di ulteriore considerazione ai fini del calcolo.

Ciò che resta, $2xo$, veniva poi diviso per l'incremento o , ottenendo il risultato desiderato, cioè la derivata di x^2 . In sintesi possiamo scrivere

$$\frac{(x + o)^2 - x^2}{o} = 2x$$

Questa la spiegazione di Newton del procedimento eseguito:

Per prima cosa svaniscono i termini che non sono moltiplicati per l'incremento o (cioè x^2 col suo opposto $-x^2$). Successivamente possiamo eliminare i termini nei quali l'incremento o si presenta con più di una dimensione (nel nostro caso o^2), poiché sono infinitamente più piccoli dell'incremento o monodimensionale. In fine ciò che resta, cioè i termini rimanenti (nel nostro caso $2xo$), vengono divisi per l'incremento o in modo da ottenere la forma desiderata.

In altre parole, Newton non si discostò molto dalla moderna nozione di limite non-standard:

Dell'ultimo passaggio che si effettua è importante capire il significato del rapporto tra quantità rimanente e incremento non prima che esso (l'incremento) svanisca, neanche in seguito, ma proprio nel momento in cui esso svanisce...Quei rapporti nei quali le quantità svaniscono non sono da assimilare a rapporti “ultimi”, ma a limiti verso cui i rapporti delle quantità che diminuiscono sempre più convergono sempre; e a cui si avvicinano più di qualsiasi differenza data, ma senza mai andare oltre, senza neanche raggiungerli, finché le quantità non sono diminuite infinitamente.

Leibniz a proposito di calcolo infinitesimale scrive:

Se le estensioni infinite successivamente sempre più grandi, o infinitamente piccole successivamente sempre più piccole, sono considerazioni legittime, allora esse rappresentano una

materia di cui sono in grado di occuparmi e su cui è possibile aprire una discussione; ma per chi volesse discutere di queste cose, non è necessario cadere in controversie metafisiche, come la composizione del continuo, o fare delle considerazioni generali di natura geometrica su ciò.

Quando parliamo di infinitamente grande (o più strettamente dell'illimitato), o di infinitamente piccolo (come la più piccola cosa che possiamo conoscere), è sufficiente capire che facciamo riferimento a quantità che sono infinitamente grandi o indefinitamente piccole, più grandi di quanto noi possiamo pensare, o più piccole di quanto noi possiamo pensare, così che lo scarto che ognuno di noi può assegnare deve essere più piccolo di una certa quantità fissata.

Se qualcuno di noi spera di capire queste cose (l'infinitamente piccolo e l'infinitamente grande) come l'ultima cosa più piccola o come la materializzazione dell'infinito, ciò può essere fatto, senza cadere in controversie circa la realtà delle estensioni, o dell'infinito continuo in generale, o dell'infinitamente piccolo, anche se pensa che queste cose siano impossibili; sarà sufficiente semplicemente fare uso di queste cose come strumenti che sono utili per i giusti propositi del calcolo, così come gli algebristi considerano con grande successo le radici immaginarie. Queste cose rappresentano un modo pratico per fare delle stime, e ciò si può fare in ogni caso ricorrendo in modo rigoroso al metodo già descritto.

Nel 1860, Karl Weierstrass mostrò come è possibile sviluppare il calcolo senza un richiamo diretto ai numeri infinitamente grandi o infinitamente piccoli. Da questo momento in poi la formulazione classica $\epsilon\delta$ diventa la norma dell'analisi matematica.

Nel 1961, Abraham Robinson mostrò come lo sviluppo del calcolo in modo logico e consistente abbia origine dal considerare un continuo contenente sia i numeri infinitamente piccoli che l'infinitamente grandi, cioè i numeri iperreali. Questo nuovo approccio all'analisi è chiamato *analisi non-standard*.

Perché studiare i limiti

Supponiamo di essere gli amministratori delegati di una media impresa, che investe un'importante somma in denaro per la campagna pubblicitaria dei propri prodotti, ricavandone un lusinghiero profitto. In qualità di amministratori vogliamo essere in grado di poter controllare questo trend positivo, in modo che all'investimento in pubblicità faccia sempre seguito un buon profitto, così da mantenere il bilancio aziendale in attivo.

Vogliamo capire quindi se ad ogni aumento della spesa pubblicitaria può essere assicurato un profitto che aumenta sempre più o se esiste un livello oltre il quale questo non può più essere aumentato.

Supponiamo che dai dati in possesso dell'azienda è possibile costruire una funzione che descriva al meglio l'andamento costo pubblicità – profitto e che tale funzione sia, ad esempio, espressa dalla seguente relazione:

$$y = \frac{40x + 2}{2x + 1}$$

Se riportiamo in una tabella alcuni valori di x ed i corrispondenti valori di y , possiamo osservare che y , pur continuando a crescere all'aumentare di x , non oltrepassa il valore 20: si avvicina *sempre più* ad esso senza mai superarlo.

Dobbiamo dunque specificare in modo oggettivo e con strumenti appropriati i due termini *sempre più* e *livello oltre il quale*.

Adesso consideriamo un altro esempio. Supponiamo di essere a capo di un'azienda che produce perni d'acciaio ad alta precisione. Il mercato richiede una determinata tolleranza oltre la quale il pezzo può essere considerato da scartare. Scopo dell'azienda è quindi quello di soddisfare il più possibile l'acquirente, sforzandosi di produrre pezzi che rispettino la precisione richiesta.

Man mano che viene fissata una tolleranza bisogna modificare le macchine in modo che il risultato ottenuto, cioè il nostro perno d'acciaio, sia conforme alle richieste. Ma i tempi cambiano e le richieste si fanno sempre più esigenti, così siamo costretti a modificare ulteriormente le macchine per consentire di creare pezzi sempre più precisi, proprio come ci viene richiesto. Ma può succedere che ad un certo punto le nostre macchine non siano più in grado di scendere al di sotto di una data tolleranza, per cui i pezzi prodotti non saranno più apprezzati e la nostra azienda sarà costretta ad uscire dal mercato. Dovremmo avere dei macchinari tali da poter creare perni d'acciaio con una precisione sempre migliore di quanto ci viene chiesto, così da rispondere alle esigenze del mercato ed assicurarci una lunga vita aziendale.

Entrambi gli esempi che abbiamo trattato mostrano l'esigenza di introdurre un nuovo concetto, quello di *limite*, che è uno dei più importanti dell'analisi matematica.

Questo argomento è di estrema importanza, ma non può essere considerato per niente facile. Le difficoltà di questo argomento riguardano sia gli studenti che devono apprendere che i docenti che devono insegnare. Infatti, come vedremo più avanti, spesso si fa molta confusione per quanto riguarda l'interpretazione verbale del concetto di limite, sia da parte dell'insegnante che dell'alunno. Esiste prima di tutto un problema di linguaggio, ma anche un altro che scaturisce dal tentativo di rendere intuitiva ed accessibile la nozione di limite, problema che riguarda un po' tutti gli aspetti della matematica.

La definizione classica di limite

Nella parte introduttiva di questo lavoro abbiamo considerato un esempio di tipo aziendale che ci può essere utile per comprendere la nozione classica di limite.

L'esempio era dell'azienda costruttrice di perni d'acciaio ed il problema era di poter disporre di un macchinario tale da soddisfare qualsiasi precisione imposta dal mercato, producendo pezzi di altissima qualità.

Se volessimo usare le parole di tutti i giorni potremmo dire che il comportamento del nostro macchinario ricalca fedelmente questo detto: "riesco ad impegnarmi tanto da fare meglio di quanto mi viene chiesto". È proprio così: il nostro macchinario può essere regolato abbastanza accuratamente da produrre perni di precisione migliore di quanto il mercato richiede.

Questo comportamento coglie la classica definizione di limite, quella $\varepsilon\delta$. Per vedere che è proprio così dobbiamo richiamare la definizione classica di limite, così come si trova nei maggiori libri di testo di analisi per scuole superiori.

Sia $f(x)$ una funzione definita in un intervallo $[a, b]$, escluso, al massimo, un punto c interno ad esso (più in generale, $f(x)$ può essere definita in un insieme D e c deve essere un punto di accumulazione per D).

Definizione: Si dice che $f(x)$, per x tendente a c , ha per limite il numero l , e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

quando, in corrispondenza ad un numero positivo ε arbitrario (piccolo ma reale), si può sempre determinare un intorno completo H del punto c tale che, per tutti i valori della x che appartengono ad $[a, b]$ e cadono in H , escluso eventualmente c , risulti soddisfatta la disequazione

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

cioè le disequazioni

$$l - \varepsilon < f(x) < l + \varepsilon$$

La definizione precedente può essere scritta in forma compatta in questo modo:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon \text{ t.c. se } |x - c| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

dove δ_ε è un numero che dipende dalla scelta di ε e rappresenta il raggio dell'intorno completo H .

Questa definizione ci presenta già alcune difficoltà assolutamente non banali. La prima, e forse quella più importante, è che con questa definizione si parte dal codominio della funzione, cioè si parte da una precisione fissata. Vale a dire che non possiamo applicare questa definizione se con conosciamo già a priori il valore del limite.

Questa definizione serve a testare la veridicità del valore del limite, cioè serve a stabilire se un dato valore è o non il limite della funzione per x tendente ad un valore. Non ci viene data alcuna

indicazione riguardo il calcolo di un limite; semplicemente possiamo dire che un valore dato è il limite della funzione se riusciamo a trovare un intorno completo del punto c (a cui tende la variabile indipendente) in corrispondenza di una precisione scelta, oppure che non lo è se questo intorno non esiste.

In pratica, per verificare se un dato numero l sia o meno il limite di una funzione $f(x)$ al tendere della variabile x ad un dato numero c , dobbiamo:

- Scrivere la disequazione $|f(x) - l| < \varepsilon$, in cui la lettera ε indica un numero reale positivo qualsiasi (anche illimitatamente piccolo);
- Risolvere la disequazione rispetto alla variabile x ;
- Verificare se, qualunque sia il numero positivo ε prefissato, fra le soluzioni trovate esista sempre un intorno H del punto c (escluso eventualmente c): in tal caso, il numero l è il limite della funzione per x che tende a c ;
- In caso contrario, cioè se la disequazione non ha soluzioni, oppure se ammette soluzioni ma, fra queste, non esiste un intorno di c , allora l non è il limite di $f(x)$ per x che tende a c .

Quindi, ancora una volta diciamo che la definizione $\varepsilon\delta$ non è altro che un test di verifica dell'effettiva correttezza del limite di una funzione.

Facciamo qualche esempio applicativo.

Verificare che risulta $\lim_{x \rightarrow 2} 2x - 1 = 3$

Per verificare questo limite, dobbiamo provare che, in corrispondenza ad un numero positivo ε arbitrario, la disequazione $|2x - 1 - 3| < \varepsilon$ è soddisfatta da tutti i valori della x che formano un intorno completo del punto 2.

Questa disequazione può essere scritta anche come $|2x - 4| < \varepsilon$, che equivale a

$$4 - \varepsilon < 2x < 4 + \varepsilon,$$

le cui soluzioni sono

$$2 - \frac{\varepsilon}{2} < x < 2 + \frac{\varepsilon}{2}$$

e, come risulta evidente, formano un intorno completo del punto 2.

Abbiamo quindi provato che, in corrispondenza al numero fissato ε , esiste un intorno completo H

del numero 2, di estremi $2 - \frac{\varepsilon}{2}$, $2 + \frac{\varepsilon}{2}$, per ogni x del quale risulta soddisfatta la disequazione

$|2x - 1 - 3| < \varepsilon$. Questo significa, per la definizione di limite, che il limite dato è corretto.

Possiamo fare un'osservazione ulteriore. La funzione $f(x) = 2x - 1$, calcolata nel punto $x = 2$ vale 3, cioè si ha $f(2) = 3$ e perciò, in questo caso, risulta $\lim_{x \rightarrow 2} f(x) = f(2)$, cioè il limite coincide con il valore della funzione nel punto $x = 2$.

Verificare che risulta: $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$.

Dobbiamo provare che, in corrispondenza a un numero positivo ε arbitrario, la disequazione

$$\left| \frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} - 2\sqrt{2} < \varepsilon \right|,$$

è soddisfatta da tutti i valori della x che formano un intorno completo del punto 2, ad eccezione di $c = 2$ nel quale la funzione non è definita.

Poiché per $x \neq 2$, si ha

$$\frac{x-2}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{x}+\sqrt{2})(\sqrt{x}-\sqrt{2})}{\sqrt{x}-\sqrt{2}} = \sqrt{x}+\sqrt{2}$$

possiamo riscrivere la disequazione in questo modo

$$|\sqrt{x}+\sqrt{2}-2\sqrt{2}| < \varepsilon$$

cioè

$$\sqrt{2}-\varepsilon < \sqrt{x} < \sqrt{2}+\varepsilon.$$

Risolvendo questo sistema di disequazioni e supponendo che sia $\varepsilon < \sqrt{2}$, si trova che è verificato dai seguenti valori:

$$(\sqrt{2}-\varepsilon)^2 < x < (\sqrt{2}+\varepsilon)^2,$$

che formano effettivamente un intorno completo di 2.

Possiamo osservare che, a differenza dell'esercizio precedente, non esiste il valore della funzione per $x = 2$, mentre ne esiste il limite per $x \rightarrow 2$.

Data la funzione, definita sui reali:

$$f(x) = \begin{cases} 2, & \text{per } x \neq 1 \\ 0, & \text{per } x = 1 \end{cases}$$

verificare che risulta $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2$.

In base alla definizione di limite, fissato un numero positivo ε arbitrario, la disequazione

$$|f(x) - 2| < \varepsilon,$$

deve essere soddisfatta in tutti i punti di un intorno H del punto 1, escluso al più 1 stesso.

Poiché, per ogni $x \neq 1$, si ha $f(x) = 2$, la disequazione precedente diventa:

$$|2 - 2| < \varepsilon,$$

ossia

$$0 < \varepsilon,$$

ed è soddisfatta in qualsiasi intorno H del punto $x = 1$.

Pertanto, il limite dato è corretto. Osserviamo che, in questo caso, abbiamo:

$$f(1) = 0, \text{ mentre } \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 2,$$

cioè il limite della funzione nel punto 1 è diverso dal valore della funzione calcolato nello stesso punto.

Gli esempi svolti, oltre ad indicare come si deve procedere per verificare un dato limite mediante la definizione, hanno evidenziato alcune circostanze fondamentali da tenere sempre presenti, e alle quali abbiamo già accennato in precedenza.

- Il numero positivo ε , di cui si parla nella definizione, deve poter essere fissato in modo arbitrario, cioè non deve essere un parametro dipendente da qualcos'altro.
- L'ampiezza dell'intorno H del punto c dipende dalla scelta di ε e dal punto c ; essa varia da funzione a funzione e, per una stessa funzione, da punto a punto.
- L'esistenza del limite di una funzione in un dato punto c è assolutamente indipendente dal comportamento della funzione nel punto stesso, come abbiamo avuto modo di vedere in due dei tre esempi precedenti.

Ancora una volta vogliamo enfatizzare l'importanza della definizione classica di limite quale test di verifica di un limite. Essa non ci dice nulla riguardo le tecniche di calcolo di un limite.

La definizione che abbiamo dato di limite si riferisce al limite finito di una funzione in un punto, ma è comunque possibile che un limite abbia un valore infinito, sia per x che tende ad un punto sia per x che tende all'infinito. l'esempio fatto nella parte introduttiva dell'azienda che cerca di aumentare sempre più il profitto aumentando le spese per la pubblicità rappresenta proprio quest'ultimo caso, cioè un limite finito (il valore era 20) per valori via via crescenti della variabile indipendente.

Senza perderci in generalità diamo le varie definizioni per poi arrivare a scriverne una generalizzata, che possa cioè inglobare in sé tutti i casi possibili.

Definizione: Si dice che la funzione $f(x)$, per x tendente a c , ha per limite l'infinito, e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = \infty$$

quando, in corrispondenza ad un numero positivo M arbitrario (un numero reale molto grande), si può sempre determinare un intorno completo H del punto c tale che, per ogni $x \in [a, b] \cap H$ distinto da c , risulti

$$|f(x)| > M$$

In particolare, se in $[a, b] \cap H$, escluso c , vale sempre la disequazione $f(x) > M$, allora

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = +\infty$$

altrimenti, se vale la disequazione $f(x) < -M$, allora

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = -\infty$$

Per le funzioni definite su intervalli del tipo: $(a, +\infty)$, $(-\infty, a)$, $(-\infty, +\infty)$, si può parlare di limite per x che tende all'infinito.

Il problema è dunque quello di studiare il comportamento della funzione quando i valori di x crescono illimitatamente in valore assoluto.

Definizione: Si dice che la funzione $f(x)$, per x tendente all'infinito, ha per limite il numero l , e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = l$$

quando, in corrispondenza ad un numero positivo ε arbitrario (numero reale piccolo), è sempre possibile determinare un numero $N > 0$ tale che la disequazione

$$|f(x) - l| < \varepsilon$$

risulti soddisfatta da tutti i valori di x per cui sia

$$|x| > N.$$

In particolare, se la disequazione $|f(x) - l| < \varepsilon$ è soddisfatta soltanto da $x > N$, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$$

altrimenti, se risulta $x < -N$ si ha

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$$

Definizione: Si dice che la funzione $f(x)$, per x tendente all'infinito, ha per limite l'infinito, e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$$

quando, in corrispondenza ad un numero positivo M arbitrario, è sempre possibile determinare un numero $n > 0$ tale che la disequazione

$$|f(x)| > M$$

risulti soddisfatta da tutti i valori di x per cui sia

$$|x| > N.$$

In particolare, se **per** $|x| > N$, risulta $f(x) > M$, allora

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = +\infty$$

se risulta $f(x) < -M$, allora

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$$

Se **per** $x > N$, risulta $|f(x)| > M$, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \infty$$

se risulta $f(x) > M$, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

se risulta $f(x) < -M$, allora

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

Se **per** $x < -N$, risulta $|f(x)| > M$, allora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$$

se risulta $f(x) > M$, allora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$$

se risulta $f(x) < -M$, allora

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty.$$

Osserviamo ancora una volta che il numero positivo ε , nella terza definizione di questo paragrafo, deve poter essere scelto in modo arbitrario, mentre il numero N dipende dal numero ε .

Così pure, il numero positivo M , nella quarta definizione di questo paragrafo, deve poter essere scelto in modo arbitrario, mentre il numero N dipende dal numero M .

Tutte le definizioni date precedentemente possono essere unificate in una sola definizione, utilizzando il concetto di intorno, nel modo seguente.

Definizione: Sia $f: D \rightarrow \mathfrak{R}$ e c un punto di accumulazione di D . Si dice che la funzione f , per x tendente a c , ha per limite l , e si scrive

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

quando, preso comunque un intorno K di l , esiste sempre un intorno H di c tale che, per ogni $x \in D \cap H - \{c\}$, si abbia

$$f(x) \in K$$

Questa definizione ha il vantaggio di applicarsi anche ai casi in cui l o c siano sostituiti da uno dei simboli: ∞ , $+\infty$, $-\infty$.

Introduzione agli iperreali

Per rendere meno faticosa la comprensione del concetto di limite abbiamo bisogno di introdurre alcuni concetti basilari sui numeri iperreali. Ricordiamo che il nostro scopo è quello di modificare la concezione errata di limite (più mi impegno, meglio faccio), che spesso viene fin troppo semplicisticamente presentata dai docenti, in modo che possa effettivamente cogliere il giusto significato di limite. Vogliamo anche fornire un metodo alternativo, che ci permetta di poter calcolare i limiti senza fare uso di tutti quei teoremi su limiti e funzioni continue che discendono dalla definizione classica di limite. La nostra scelta è, tuttavia, giustificata dall'esigenza di insegnare il giusto significato del concetto di limite, e non dal fare economia di teoremi.

I metodi che utilizzeremo sono quelli dell'analisi non-standard e che discendono dal calcolo infinitesimale introdotto da Newton e Leibniz nel XVII secolo d.C.

Possiamo pensare ai numeri iperreali come all'estensione dei numeri reali, con l'aggiunta di quantità infinitamente piccole ed infinitamente grandi.

Essi risultano essere un campo ordinato completo, estensione del campo dei reali (in modo simile di come il campo ordinato completo dei reali rappresenta l'estensione dei razionali). Essi contengono, oltre ai numeri reali, infiniti numeri piccolissimi ed infiniti numeri molto grandi, entrambi evidentemente non reali. Le proprietà logiche di questo nuovo campo sono le stesse del campo dei reali.

Un modo molto utile ed immediato di immaginare i numeri iperreali è quello di usare un microscopio ad ingrandimento infinito, capace di cogliere lo spazio immaginario esistente tra due numeri reali consecutivi. Così, puntando il nostro microscopio su un numero reale qualsiasi, saremo in grado di individuare alcuni dei numeri iperreali infinitamente vicini al numero reale puntato col microscopio. Dobbiamo invece usare un telescopio ad ingrandimento infinito per cogliere gli iperreali in valore assoluto infinitamente grandi che si trovano oltre il più grande dei numeri reali.

Assioma di estensione:

- *L'insieme R dei numeri reali è un sottoinsieme dell'insieme R^* dei numeri iperreali;*
- *La relazione d'ordine $<^*$ su R^* è l'estensione della relazione d'ordine $<$ di R ;*
- *Esiste un numero iperreale ε tale che $0 <^* \varepsilon$ e $\varepsilon <^* r$, per ogni numero reale positivo r ;*
- *Per ogni funzione reale f esiste una funzione iperreale f^* che ha le seguenti proprietà:*
 - *$\text{Dominio}(f) = R \setminus \text{dominio}(f^*)$;*
 - *$f(x) = f^*(x)$ per ogni $x \in \text{dominio}(f)$.*

Assioma del trasferimento

Ogni proprietà standard (riguardante insiemi costruiti coi reali) è soddisfatta se e solo se la proprietà corrispondente non-standard (riguardante insiemi costruiti con gli iperreali – formati con l'aggiunta dell'operatore $*$) risulta soddisfatta.

Possiamo fare un semplice esempio. Vediamo come ricavare la proprietà commutativa per gli iperreali, in base ai due assiomi precedenti.

La proprietà commutativa, che qui indichiamo come proposizione S (diamo per scontato che i destinatari di questo lavoro, gli studenti, sappiano che i reali hanno una loro struttura assiomatica fatta in un certo modo), per i reali si esprime in questo modo:

$$S: \forall a \in R, \forall b \in R, a + b = b + a \text{ e } a \cdot b = b \cdot a$$

L'assioma di estensione ci fornisce R^* , $+^*$, \cdot^* e \in^* , mentre l'assioma del trasferimento ci dice che la proprietà commutativa S^* per gli iperreali è soddisfatta:

$$S^*: \forall a \in {}^*R^*, \forall b \in {}^*R^*, a + {}^*b = b + {}^*a \text{ e } a \cdot {}^*b = b \cdot {}^*a$$

I due assiomi hanno una grande importanza ai fini didattici. Infatti, sono questi gli assiomi che ci permettono di calcolare i limiti utilizzando gli iperreali, ma facendo riferimento alle stesse proprietà che conosciamo per i reali. Più avanti considereremo, infatti, le estensioni iperreali di funzioni reali, funzioni che manterranno le stesse proprietà di quelle reali, come ci assicura l'assioma del trasferimento. Ma anche le operazioni sugli iperreali mantengono le stesse proprietà che hanno sui reali, come espresso dall'assioma di estensione.

Definizione: Un numero iperreale b è detto:

- **Infinitesimo positivo** se b è positivo ma è più piccolo di qualsiasi numero reale positivo;
- **Infinitesimo negativo** se b è negativo ma è più grande di qualsiasi numero reale negativo;
- **Infinitesimo** (in generale) se b è o positivo infinitesimo, o negativo infinitesimo, o 0.

Definizione: Un numero iperreale b è detto:

- **Finito** se b è compreso tra due numeri reali, dei quali nessuno è 0;
- **Infinito positivo** se b è più grande di ogni numero reale positivo;
- **Infinito negativo** se b è più piccolo di ogni numero reale negativo;
- **Infinito** (in generale) se b è infinito positivo o infinito negativo.

Teorema della parte standard: Per ogni numero iperreale b , esiste esattamente un solo numero reale r infinitamente vicino a b .

Definizione: Se b è un iperreale finito allora il numero reale r , infinitamente vicino a b , è chiamato parte standard di b , e si indica con $r = st(b)$.

La dimostrazione del teorema della parte standard è divisa in due parti. La prima riguarda l'unicità e la seconda l'esistenza.

Unicità: Siano $r, s \in R$ due numeri reali tali che b sia infinitamente vicino ad r e sia infinitamente vicino anche a s . Essendo la relazione “essere infinitamente vicino” una relazione di equivalenza, abbiamo che r deve essere infinitamente vicino a s . Se s ed r sono infinitamente vicini abbiamo che la differenza $s - r$ è infinitesima e reale (in quanto differenza di numeri reali). Ma l'unico numero reale che può essere infinitesimo è 0, quindi $r - s = 0$, cioè $r = s$.

Esistenza: Poiché b è un iperreale finito, esistono due numeri reali s e t per cui risulta $s < b < t$.

Sia $A = \{x \mid x \text{ è reale e } x < b\}$. A è un insieme non vuoto poiché contiene almeno s ed è superiormente limitato da t . Allora esiste un numero reale r che è l'estremo superiore di A .

Vogliamo dimostrare che r è il numero reale a cui b è infinitamente vicino.

Supponiamo per assurdo che non sia così, quindi $r - b$ è positivo o negativo.

Supponiamo che $r - b$ sia positivo. Poiché $r - b$ non è un infinitesimo positivo, esiste un numero reale positivo s tale che $s < r - b$, per cui risulta $b < r - s$, così che $r - s$ è un maggiorante di A .

Quindi $r - s \geq r$ ma deve anche essere $r - s \leq r$. Così concludiamo che $r - b$ non può essere positivo.

Supponiamo allora che $r - b$ sia negativo. Poiché $r - b$ non è un infinitesimo negativo, esiste un numero reale negativo s tale che $r - b < s$, il che implica $r - s < b$. In questo modo $r - s$ è un elemento di A e quindi $r \geq r - s$. Ma deve anche essere $r < r - s$, poiché $s < 0$.

In entrambi i casi si giunge ad una contraddizione, quindi $r - b$ deve essere infinitesimo, cioè b è infinitamente vicino ad r .

◆

Questo teorema è importantissimo perché ci permette di individuare, come vedremo in seguito, il valore del limite di una funzione in un punto. Probabilmente non possiamo proporre questa dimostrazione agli studenti di una quinta classe di un liceo scientifico a causa delle oggettive difficoltà che essa può presentare. Infatti, in questa dimostrazione si parla di “maggioranti”, di “insiemi superiormente limitati”, di “estremi superiori”, concetti che difficilmente vengono trattati dai docenti di matematica in modo esauriente e chiaro. Quindi, è opportuno limitarsi alla presentazione del solo enunciato, data l'importanza innegabile del teorema, lasciando al docente la possibilità di studiare la dimostrazione al fine di rendere più efficaci le proprie argomentazioni in fase di presentazione del teorema alla classe.

Come ultima cosa proviamo l'esistenza dei numeri infiniti. Sia ε un infinitesimo positivo, cioè sia tale che risulti $0 < \varepsilon < r$, per ogni numero reale positivo r .

Se r è un numero reale positivo, allora lo è anche il numero $1/r$. Quindi risulta vero che $0 < \varepsilon < 1/r$, così come risulta vero che $1/\varepsilon > r$. Sia $H = 1/\varepsilon$. Risulta $H > r$ per ogni numero reale positivo r , cioè che H è un numero infinito.

Come si usano gli iperreali

In questo paragrafo parleremo di come possono essere usati gli iperreali e le loro proprietà al fine di meglio comprendere come si possono calcolare i limiti. Infatti, come abbiamo già visto in precedenza, la definizione classica di limite non fornisce alcuna indicazione su come calcolare i limiti e, per far ciò, avremmo avuto bisogno di diversi teoremi sia sui limiti che sulle funzioni continue. In questo modo, rifacendoci all'idea di calcolo infinitesimale avuta da Newton e Leibniz ed utilizzando gli iperreali, riusciremo a caratterizzare meglio, e secondo me in modo molto più semplice ed immediato, il concetto di limite. Con questo metodo faremo riferimento all'infinitamente vicino, fino a giungere alle forme indeterminate, questa volta viste da un nuovo punto di vista, quello dell'infinitamente piccolo e dell'infinitamente grande.

Possiamo ora generalizzare, a titolo introduttivo, l'approccio che seguiremo utilizzando l'analisi non standard.

Per prima cosa dobbiamo partire da un problema standard, cioè che si riferisce ai numeri reali (possiamo benissimo pensare al calcolo di limiti, che è ciò che faremo in questo lavoro). In secondo luogo, grazie ai due assiomi degli iperreali visti nel paragrafo precedente, possiamo estendere il nostro problema utilizzando l'analisi non-standard, cioè passando agli iperreali, aggiungendo quindi l'operatore $*$. Risolviamo il nostro problema trovando soluzioni che definiamo non-standard e, rimuovendo l'operatore $*$ consideriamo la parte standard della soluzione trovata.

In pratica quello che facciamo è un continuo passaggio tra i Reali e gli Iperreali attraverso gli assiomi di estensione e di trasferimento.

Vediamo adesso alcune proprietà degli iperreali.

Siano ε e δ infinitesimi positivi; siano b, c numeri iperreali positivi finiti ma non infinitesimi; siano H e K numeri iperreali infiniti positivi e sia n un numero intero. Abbiamo che

- $-\varepsilon$ è un infinitesimo negativo;
- $-b$ è un iperreale negativo finito ma non infinitesimo;
- $-H$ è un iperreale infinito negativo;
- $1/\varepsilon$ è un iperreale infinito;
- $1/b$ è un iperreale finito ma non infinitesimo;
- $1/H$ è un infinitesimo;
- $\varepsilon + \delta$ è un infinitesimo;
- $b + \varepsilon$ è un iperreale finito ma non infinitesimo;
- $b + c$ è un iperreale finito ma può essere anche infinitesimo (dipende da b e c);
- $H + \varepsilon$ e $H + b$ sono iperreali infiniti;

- $\varepsilon \cdot \delta$ e $\varepsilon \cdot b$ sono infinitesimi;
- $b \cdot c$ è un iperreale finito ma non infinitesimo;
- $H \cdot b$ e $H \cdot K$ sono iperreali infiniti;
- εb , εH e b/H sono infinitesimi;
- b/c è un iperreale finito ma non infinitesimo;
- b/ε , H/ε e H/b sono iperreali infiniti, purché sia $\varepsilon \neq 0$.

Dalle operazioni presentate abbiamo escluso alcune combinazioni possibili in quanto non siamo in grado di stabilirne il risultato a priori. Queste particolari situazioni sono anche dette *forme indeterminate*, che sono queste quattro:

- ε/δ (che corrisponde alla classica forma indeterminata $0/0$);
- H/K (che corrisponde alla classica forma indeterminata ∞/∞);
- $H \cdot \varepsilon$ (che corrisponde alla classica forma indeterminata $\infty \cdot 0$);
- $H + K$ (che corrisponde alla classica forma indeterminata $\infty + \infty$).

Alcuni esempi di operazioni che hanno come risultato un infinitesimo possono essere:

$$\varepsilon^2/\varepsilon, H/H^2, H(1/H^2), H + (-H).$$

Esempi di operazioni che hanno come risultato un iperreale finito possono essere:

$$\varepsilon/\varepsilon, H/H, H(1/H), (H + 1) + (-H).$$

Esempi di operazioni che hanno come risultato un iperreale infinito possono essere:

$$\varepsilon/\varepsilon^2, H^2/H, H^2(1/H), H + H.$$

Al fine di completare il quadro delle operazioni diamo una serie di teoremi e definizioni.

Teorema:

- Ogni numero iperreale compreso tra due infinitesimi è infinitesimo;
- Ogni numero iperreale compreso tra due numeri iperreali finiti è un iperreale finito;
- Ogni numero iperreale che è più grande di qualche numero iperreale infinito positivo è un iperreale infinito positivo;
- Ogni numero iperreale che è più piccolo di qualche numero iperreale infinito negativo è un iperreale infinito negativo.

Definizione: Due numeri x e y si dicono infinitamente vicini (e si indica con $x \approx y$) se e solo se la differenza $(x - y)$ è infinitesima.

Teorema: Siano a, b, c numeri iperreali. Allora

1. $a \approx a$;
2. se $a \approx b$, allora $b \approx a$;
3. se $a \approx b$ e $b \approx c$, allora $a \approx c$.

Questo significa che \approx è una relazione di equivalenza.

Teorema: Sia $a \approx b$. Allora

1. se a è infinitesimo, anche b lo è;
2. se a è finito, anche b lo è;
3. se a è infinito, anche b lo è.

Definizione: Sia b un numero iperreale finito. La parte standard di b , indicata con $st(b)$, è il numero reale che è infinitamente vicino a b . Questo significa che:

1. $st(b)$ è un numero reale;
2. $b = sd(b) + \varepsilon$, per qualche infinitesimo ε ;
3. se b è un numero reale allora $st(b) = b$.

Teorema: Siano a, b numeri iperreali finiti. Allora

1. $st(-a) = -st(a)$;
2. $st(a + b) = st(a) + st(b)$;
3. $st(a - b) = st(a) - st(b)$;
4. $st(ab) = st(a) \cdot st(b)$;
5. se $st(b) \neq 0$, allora $st(a/b) = st(a)/st(b)$;
6. $st(a)^n = st(a^n)$;
7. se $a \geq 0$, allora $st(\sqrt[n]{a}) = \sqrt[n]{st(a)}$
8. se $a \leq b$, allora $st(a) \leq st(b)$.

Nel prossimo paragrafo vedremo come grazie a questi teoremi siamo in grado di risolvere dei limiti (soprattutto le forme indeterminate) utilizzando le estensioni iperreali e considerando in seguito la parte standard.

Esempi di utilizzo dell'analisi non-standard nel calcolo di limiti

Vediamo come l'analisi non-standard ci viene in aiuto in modo molto semplice ed intuitivo nella risoluzione di alcuni limiti.

Supponiamo di voler risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2 + 2x - 24}{x^2 - 16}$$

Si vede chiaramente che questo limite da vita ad una forma indeterminata del tipo $0/0$.

Risolviamolo ricorrendo all'analisi non-standard.

Consideriamo per prima cosa l'estensione iperreale della funzione argomento del limite. Sia c un numero iperreale finito tale che $c \approx 4$, ma con $c \neq 4$. Abbiamo che

$$\frac{c^2 + 2c - 24}{c^2 - 16} = \frac{(c+6)(c-4)}{(c+4)(c-4)} = \frac{c+6}{c+4}$$

Ora passiamo alla parte standard e applichiamo più volte l'ultimo teorema del paragrafo precedente. Abbiamo

$$st\left(\frac{c+6}{c+4}\right) = \frac{st(c+6)}{st(c+4)} = \frac{st(c) + st(6)}{st(c) + st(4)}$$

Ora dobbiamo fare delle semplicissime considerazioni. Come sappiamo, la parte standard di un numero iperreale finito è il numero reale infinitamente vicino all'iperreale finito considerato. Nel nostro caso, avendo posto all'inizio $c \approx 4$, risulta evidente che la parte standard di c è proprio 4.

Quindi possiamo scrivere

$$\frac{st(c) + st(6)}{st(c) + st(4)} = \frac{4+6}{4+4} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}$$

e la nostra forma indeterminata è risolta in modo semplice ed immediato.

Ora vogliamo risolvere il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^3 + 5x^2 - 3x}{7x^3 - 2x^2 + 4x}$$

In questo caso abbiamo una forma indeterminata del tipo ∞/∞ . Cercheremo di risolverla ricorrendo all'analisi non-standard.

Consideriamo l'estensione iperreale della funzione argomento del limite e scegliamo un numero iperreale infinito positivo H . Abbiamo

$$\frac{2H^3 + 5H^2 - 3H}{7H^3 - 2H^2 + 4H} = \frac{H^{-3}(2H^3 + 5H^2 - 3H)}{H^{-3}(7H^3 - 2H^2 + 4H)} = \frac{2 + 5H^{-1} - 3H^{-2}}{7 - 2H^{-1} + 4H^{-2}}$$

A questo punto possiamo subito notare come sia H^{-1} che H^{-2} siano due infinitesimi (in quanto reciproci rispettivamente di due numeri iperreali infiniti). Questa è una considerazione molto importante in quanto sappiamo, per quanto visto in precedenza, che la parte standard di un infinitesimo è 0, che è il numero reale infinitamente vicino agli infinitesimi iperreali, oppure possiamo considerare 0 l'unico infinitesimo reale, e anche questo l'abbiamo già visto in precedenza. Consideriamo la parte standard di quanto ottenuto fino a questo momento e applichiamo più volte l'ultimo teorema del paragrafo precedente. Abbiamo

$$\begin{aligned} st\left(\frac{2+5H^{-1}-3H^{-2}}{7-2H^{-1}+4H^{-2}}\right) &= \frac{st(2+5H^{-1}-3H^{-2})}{st(7-2H^{-1}+4H^{-2})} = \frac{st(2)+st(5H^{-1})-st(3H^{-2})}{st(7)-st(2H^{-1})+st(4H^{-2})} = \\ &= \frac{st(2)+st(5)st(H^{-1})-st(3)st(H^{-2})}{st(7)-st(2)st(H^{-1})+st(4)st(H^{-2})} = \frac{2+5\cdot 0-3\cdot 0}{7-2\cdot 0+4\cdot 0} = \frac{2+0-0}{7-0+0} = \frac{2}{7} \end{aligned}$$

e anche questa volta siamo riusciti a risolvere in modo semplice la nostra forma indeterminata.

Calcoliamo adesso il seguente limite:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{5 - \sqrt{25+x}}$$

Risulta evidente che ci troviamo di fronte ad una forma indeterminata del tipo 0/0. Risolviamola utilizzando l'analisi non-standard.

Consideriamo l'estensione iperreale della funzione argomento del limite e scegliamo un infinitesimo non nullo ε . Abbiamo

$$\frac{\varepsilon}{5 - \sqrt{25+\varepsilon}} = \frac{\varepsilon(5 + \sqrt{25+\varepsilon})}{(5 - \sqrt{25+\varepsilon})(5 + \sqrt{25+\varepsilon})} = \frac{\varepsilon(5 + \sqrt{25+\varepsilon})}{25 - (25+\varepsilon)} = \frac{\varepsilon(5 + \sqrt{25+\varepsilon})}{-\varepsilon} = -5 - \sqrt{25+\varepsilon}$$

Adesso passiamo alla parte standard, ricordandoci che la parte standard di un infinitesimo è 0.

Abbiamo

$$\begin{aligned} st(-5 - \sqrt{25+\varepsilon}) &= -st(5 + \sqrt{25+\varepsilon}) = -st(5) - st(\sqrt{25+\varepsilon}) = \\ &= -st(5) - \sqrt{st(25+\varepsilon)} = -st(5) - \sqrt{st(25) + st(\varepsilon)} = -5 - \sqrt{25+0} = \\ &= -5 - 5 = -10 \end{aligned}$$

e anche questa volta abbiamo risolto la nostra forma indeterminata in modo semplice e veloce.

Equivalenza tra la definizione standard e non-standard di limite

Col teorema che adesso presentiamo vogliamo legare il comportamento di una funzione nell'infinitamente vicino al suo comportamento nel vicino. La definizione di limite, data utilizzando gli infinitesimi, coglie proprio il comportamento nell'infinitamente vicino, mentre la definizione classica $\varepsilon\delta$ è stata elaborata proprio per cogliere il comportamento nel vicino.

Per prima cosa prendiamo in considerazione le due definizioni di limite, quella standard e quella non-standard:

$$\lim_{x \rightarrow c} f(x) = l$$

Definizione standard:

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_\varepsilon > 0 \text{ tale che } \forall x, \text{ se } |x - c| < \delta_\varepsilon \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$$

Definizione non-standard:

$$\forall \xi \text{ infinitesimo } (\xi \neq 0) \Rightarrow f(c + \xi) \approx l$$

Questa definizione rappresenta la formalizzazione del procedimento mostrato nel paragrafo precedente per calcolare i limiti, utilizzando gli iperreali. Il fatto che ci sia un infinitesimo ξ non nullo, ci assicura di avere a disposizione un iperreale finito ed infinitamente vicino a c . Questo iperreale finito è proprio $c + \xi$, che dipende dalla scelta dell'infinitesimo ξ . La definizione ci assicura che il valore dell'estensione iperreale della funzione f , calcolata nel punto iperreale $c + \xi$, è infinitamente vicino a l . La sua parte standard, per quanto visto nei paragrafi precedenti, è quindi proprio l .

Ho scelto di inserire questa definizione a questo punto del lavoro per rendere omogeneo il paragrafo. In realtà essa sarebbe da presentare all'inizio del paragrafo precedente, in cui vengono fatti degli esempi di applicazione.

Teorema: *Per ogni ξ infinitesimo non nullo, $f(c + \xi)$ è infinitamente vicino ad l se e solo se per ogni reale positivo ε esiste un reale positivo δ tale che per ogni x , se $|x - c| < \delta$ allora $|f(x) - l| < \varepsilon$.*

Questo teorema ci dice che le due definizioni sono equivalenti.

Dimostrazione:

Dimostriamo prima nella direzione dalla definizione $\varepsilon\delta$ di limite alla definizione di limite usando gli infinitesimi.

Per dimostrare che vale la definizione con gli infinitesimi bisogna far vedere che la differenza $|f(x) - l|$ è infinitesima, cioè minore di ogni reale positivo, e ciò quando x è infinitamente vicino a c , ma diverso da c , magari utilizzando il fatto che vale la definizione $\varepsilon\delta$.

Così sia r un qualsiasi reale positivo. In base alla definizione $\varepsilon\delta$ sappiamo che ad r corrisponderà un numero reale positivo, chiamiamolo ancora δ (che stavolta dipenderà da r) tale che per tutti i reali diversi da c e più vicini a c di δ , il valore della funzione in c è più vicino a l del reale fissato r . Se si considera un numero iperreale x diverso da c e infinitamente vicino a c , la sua distanza da c sarà sicuramente minore di δ , sicché l'estensione iperreale della funzione reale f (che deve avere le stesse proprietà esprimibili con formule della funzione reale f) calcolata in x darà un valore più vicino a l della quantità r prefissata ad arbitrio. Vista l'arbitrarietà del numero reale positivo r , segue che la quantità $|f(x) - l|$ sarà minore di ogni reale positivo, e dunque un infinitesimo, e ciò per ogni numero x diverso da c ma infinitamente vicino a c , come si voleva dimostrare. Così la definizione $\varepsilon\delta$ di limite implica quella con gli infinitesimi.

Per l'altra direzione dimostriamo la contronominale, cioè che se non vale la definizione $\varepsilon\delta$ di limite allora non vale neppure la definizione di limite con gli infinitesimi. Per mostrare che non vale la definizione di limite con gli infinitesimi bisogna far vedere che per qualche valore x diverso da c ma infinitamente vicino a c , l'estensione iperreale della funzione reale f , calcolata in quel punto, non è infinitamente vicina a l .

D'altra parte la negazione della definizione $\varepsilon\delta$ equivale alla seguente affermazione: esiste un numero reale positivo, chiamiamolo ε , tale che per ogni reale positivo δ , esiste un reale, chiamiamolo x_δ , tale che è diverso da c , $|x_\delta - c| < \delta$ e $|f(x) - l| \geq \varepsilon$.

Così fissato un tale ε si può determinare una funzione reale φ che ad ogni reale positivo (valore da dare a δ) associa un numero reale $x_\delta = \varphi(\delta)$ (tra quelli che ci sono) con le caratteristiche che $|x_\delta - c| < \delta$ e $|f(x_\delta) - l| \geq \varepsilon$. Consideriamo ora le estensioni iperreali delle due funzioni reali f e φ . Ora si possono applicare anche a numeri iperreali mantenendo le stesse proprietà. In particolare consideriamo un iperreale δ_0 infinitesimo positivo: in tal caso c'è un iperreale $\varphi(\delta_0)$ tale che esso è diverso da c , infinitamente vicino a c (poiché $|x_\delta - c| < \delta_0$ che è un infinitesimo) e $|f(\varphi(\delta_0)) - l| \geq \varepsilon$, con ε quel reale positivo fissato in precedenza.

Questo mostra che, se non vale la definizione $\varepsilon\delta$ di limite, si può trovare un iperreale diverso da c ma infinitamente vicino a c tale che la funzione f calcolata in questo iperreale non è infinitamente vicina a l , sicché non vale neppure la definizione di limite con gli infinitesimi. Ciò conclude la dimostrazione.

◆

Credo che questa dimostrazione presenti, in alcuni punti, delle difficoltà che studenti di quinto liceo non sono mediamente in grado di superare. Mi riferisco in particolare alla seconda parte della dimostrazione, quando bisogna considerare la funzione $\varphi(\delta)$. La cosa migliore da fare è quella di

dare in pasto agli studenti solo l'enunciato del teorema, lasciando al docente lo studio della dimostrazione come guida all'azione didattica e come spunto di riflessione sulla reale potenzialità dell'uso degli iperreali nella risoluzione di limiti.

Bibliografia

- R. Ferro - *Appunti di Didattica della Matematica 2* – SSIS del Veneto, VI ciclo, A.A. 2005 – 2006;
- N. Martins, V. Neves – *Nonstandard discrete derivatives and existence theorems for ode* – Rend. Sem. Mat. Univ. Pol. Torino, 2005;
- D. Slougher – *Calculus without ϵ 's and δ 's* – Dep of Math, Furman University, 18/11/2004;
- M. Scovenna – *Analisi Infinitesimale* – CEDAM 2001